

ΘΕΜΑ 1

A.

- α) Λάθος
- β) Λάθος
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Λάθος

B. Σχ. Βιβλίο σελ. 33

ΘΕΜΑ 2

- α) $\vec{u} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} = 5(1, -3) - 5(-2, -1) = (3, -9) - (-10, -5) = (13, -4)$
 $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta} = 5(1, -3) - 9(-2, -1) = (5, -15) - (-18, -9) = (23, -6)$
- β) $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v} = 2(3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}) - (5\vec{\alpha} - 9\vec{\beta}) = 6\vec{\alpha} - 10\vec{\beta} - 5\vec{\alpha} + 9\vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} = 1 \cdot \vec{\alpha} + (-1) \cdot \vec{\beta}$

- γ) $\vec{\beta} = \overrightarrow{OK}, \vec{w} = \overrightarrow{OL}, \vec{u} = \overrightarrow{OM}$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KL} &= \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OK} = \vec{w} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta} \\ \overrightarrow{LM} &= \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OL} = \vec{u} - \vec{w} = 3\vec{\alpha} - 5\vec{\beta} - \vec{\alpha} + \vec{\beta} = 2(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2\overrightarrow{KL}\end{aligned}$$

Οπότε αφού $\overrightarrow{LM} = 2\overrightarrow{KL}$, τα δύο διανύσματα είναι παράλληλα. Ακόμα, αφού έχουν κοινό σημείο το Λ, τα σημεία K, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 3

- α) Είναι $\lambda_{AG} = \frac{y_A - y_G}{x_A - x_G} = \frac{7-4}{3-6} = -1$

Το ύψος ΒΔ είναι κάθετο στην ΑΓ, άρα θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{BD} = -\frac{1}{\lambda_{AG}} = 1$, και αφού διέρχεται από το σημείο $B(-4, -2)$ θα έχει εξίσωση

$$\begin{aligned}y - (-2) &= (x - (-4)) \\ y + 2 &= x + 4 \\ y &= x + 2\end{aligned}$$

- β) Το σημείο Δ είναι το σημείο τομής του ύψους ΒΔ και της πλευράς ΑΓ. Η πλευρά ΑΓ έχει εξίσωση

$$\begin{aligned}y - 4 &= -(x - 6) \\y - 4 &= -x + 6 \\y &= -x + 10\end{aligned}$$

Άρα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ x + 2 = -x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ 2x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 4 \end{cases}$$

Οπότε είναι $\Delta(4,6)$.

γ) Το M είναι μέσο του BΓ άρα έχει συντεταγμένες

$$M\left(\frac{x_B + x_\Gamma}{2}, \frac{y_B + y_\Gamma}{2}\right) = \left(\frac{-4 + 6}{2}, \frac{-2 + 4}{2}\right) = (1,1)$$

Και η AM έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{1 - 7}{1 - 3} = \frac{-6}{-2} = 3$ και αφού διέρχεται από το M, θα έχει εξίσωση

$$\begin{aligned}y - 1 &= 3(x - 1) \\y - 1 &= 3x - 3 \\y &= 3x - 2\end{aligned}$$

Για να βρούμε το E λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων της AM και του BΔ. Οπότε έχουμε

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 3x - 2 = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x - 2 \\ 2x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Άρα είναι $E(2,4)$.

δ) Σπάμε το τετράπλευρο σε δύο τρίγωνα, ΜΕΓ και ΕΓΔ. Είναι

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ME} &= (1,3) \\ \overrightarrow{MG} &= (5,3)\end{aligned}$$

Άρα το εμβαδόν του ΜΕΓ είναι

$$(ME\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MG})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |3 - 15| = 6$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EG} &= (4,0) \\ \overrightarrow{ED} &= (2,2)\end{aligned}$$

Άρα το εμβαδόν του ΕΓΔ είναι

$$(E\Gamma\Delta) = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{EG}, \overrightarrow{ED})| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |8 - 0| = 4$$

Επομένως το εμβαδόν του τετραπλεύρου είναι $(ME\Gamma) + (E\Gamma\Delta) = 6 + 4 = 10$.

ΘΕΜΑ 4

α) Θα πρέπει $A^2 + B^2 - 4A\Gamma > 0$. Είναι $A = -4\alpha, B = -4\alpha, \Gamma = 0$. Οπότε πρέπει

$$\begin{aligned}(-4\alpha)^2 + (-4\alpha)^2 - 4 \cdot 4\alpha \cdot 0 &> 0 \\ \Rightarrow 16\alpha^2 + 16\alpha^2 &> 0 \\ \Rightarrow 32\alpha^2 &> 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha \neq 0$$

β) Ο κύκλος έχει κέντρο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right) = (2\alpha, 2\alpha)$ και ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4A\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{32\alpha^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}\alpha^2}{2} = 2\sqrt{2}|\alpha|$$

γ) Είναι $K(2\alpha, 2\alpha), \alpha \neq 0$ άρα αν είναι $K(x, y)$ τότε $\begin{cases} x = 2\alpha \\ y = 2\alpha \end{cases}, \alpha \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ x \neq 0 \end{cases}$

Ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων είναι η ευθεία $y = x$ με εξαίρεση το σημείο $O(0,0)$.

δ) Για να εφάπτεται ο κύκλος στον άξονα $x'x$ θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} d(K, x'x) = R &\Rightarrow |y_K| = 2\sqrt{2}|\alpha| \Rightarrow |2\alpha| = 2\sqrt{2}|\alpha| \\ &\Rightarrow |\alpha| = \sqrt{2}|\alpha| \Rightarrow |\alpha|(1 - \sqrt{2}) = 0 \Rightarrow |\alpha| = 0 \Rightarrow \alpha = 0. \end{aligned}$$

Όμως όπως δείξαμε πρέπει να είναι $\alpha \neq 0$, άρα η εξίσωση είναι αδύνατη. Οπότε δεν υπάρχει κύκλος αυτής της μορφής που να εφάπτεται στον άξονα $x'x$.