

### ΘΕΜΑ 1

A.

α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

B. Σχ. Βιβλίο σελ. 66

### ΘΕΜΑ 2

α) Το σημείο Δ είναι σημείο τομής των πλευρών ΑΔ και ΒΔ. Οπότε για να βρούμε τις συντεταγμένες του, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους:

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2(x + 2) + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2x - 4 + 5 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Άρα Δ(-1,1).

β) Προφανώς  $\lambda_{BD} = 1$  και αφού  $BD \perp AG$ , θα είναι  $\lambda_{AG} = -\frac{1}{\lambda_{BD}} \Rightarrow \lambda_{AG} = -1$ . Και αφού διέρχεται από το σημείο Α, η διαγώνιος ΑΓ θα έχει εξίσωση

$$y - 4 = -1(x - 1) \Rightarrow y - 4 = -x + 1 \Rightarrow y = -x + 5$$

### ΘΕΜΑ 3

α) Είναι  $y^2 = 2px$  άρα  $2p = 32 \Rightarrow p = 16$ . Η εστία έχει συντεταγμένες  $E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = E(8,0)$ , και η διευθετούσα έχει εξίσωση (δ):  $x = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = -8$ .

β) Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου Α στην εξίσωση της παραβολής και έχουμε

$$\begin{aligned} y^2 &= 32x \\ 8^2 &= 32 \cdot 2 \\ 64 &= 64, \text{ που ισχύει} \end{aligned}$$

Άρα το Α ανήκει στην παραβολή. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο Α έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} yy_1 &= p(x + x_1) \\ y \cdot 8 &= 16(x + 2) \\ 8y &= 16x + 32 \\ y &= 2x + 4 \end{aligned}$$

$$2x - y + 4 = 0$$

- γ) i) Αρχικά βρίσκουμε σε ποιο σημείο τέμνει η εφαπτομένη τον άξονα  $y'y$ . Θέτουμε  $x = 0$  και έχουμε  $2 \cdot 0 - y + 4 = 0 \Rightarrow y = 4$ . Άρα στο  $B(0,4)$ .

Το ΑΕ έχει μήκος

$$(AE) = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = \sqrt{(8 - 2)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$$

Επομένως η ακτίνα είναι  $\rho = \frac{AE}{2} = \frac{10}{2} = 5$ .

Το κέντρο του κύκλου είναι το μέσο της διαμέτρου, με συντεταγμένες

$$K = \left( \frac{x_A + x_E}{2}, \frac{y_A + y_E}{2} \right) = \left( \frac{2 + 8}{2}, \frac{0 + 8}{2} \right) = (5, 4).$$

Άρα ο κύκλος έχει εξίσωση

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 + (y - 4)^2 &= 5^2 \\ x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16 &= 25 \\ x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 &= 0 \end{aligned}$$

- ii. Θα δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του  $B(0,4)$  επαληθεύουν την εξίσωση του κύκλου:

$$\begin{aligned} 0^2 + 4^2 - 10 \cdot 0 - 8 \cdot 4 + 16 &= 0 \\ 16 - 32 + 16 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Που ισχύει, άρα ο κύκλος διέρχεται από το σημείο  $B$ .

## ΘΕΜΑ 4

- α)  $|\vec{a}|^2 = (|\vec{a}| - 4)^2 + (|\vec{a}| - 2)^2 \Rightarrow |\vec{a}|^2 - 12|\vec{a}| + 20 = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = 2 \text{ ή } |\vec{a}| = 10$

Αν  $|\vec{a}| = 2$ , τότε θα είναι  $\alpha = (-2, 0)$  και τότε

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -16 \neq 0$$

Οπότε τα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα (σχηματίζουν τρίγωνο). Άρα η λύση αυτή είναι δεκτή.

Αντίθετα, αν  $|\vec{a}| = 10$ , προκύπτει  $\vec{\alpha} = (6, 8) = \vec{OB}$  και άρα τα διανύσματα δεν σχηματίζουν τρίγωνο.

- β) Θα πρέπει να ισχύει  $\vec{OA} = \vec{BG}$ . Άρα αν  $\Gamma(x, y)$ , θα πρέπει

$$\begin{aligned} (-2, 0) &= (x - 6, y - 8) \\ \begin{cases} x - 6 = -2 \\ y - 8 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Οπότε είναι  $\Gamma(4, 8)$ .

- γ) Είναι  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (8, 8)$  και  $\vec{AO} = -\vec{OA} = (2, 0)$ . Οπότε είναι  $|\vec{AB}| = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$  και  $|\vec{AO}| = \sqrt{2^2} = 2$ . Ακόμα, είναι  $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = 8 \cdot 2 + 8 \cdot 0 = 16$ .

Επομένως είναι

$$\text{συνω} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AO}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AO}|}$$

$$\cos\omega = \frac{16}{8\sqrt{2} \cdot 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^\circ$$

Οπότε η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων είναι  $45^\circ$ .