

ΘΕΜΑ 1

Α.

- α) Λάθος
- β) Σωστό
- γ) Λάθος
- δ) Λάθος
- ε) Σωστό

Β. Σχ. Βιβλίο σελ. 25

ΘΕΜΑ 2

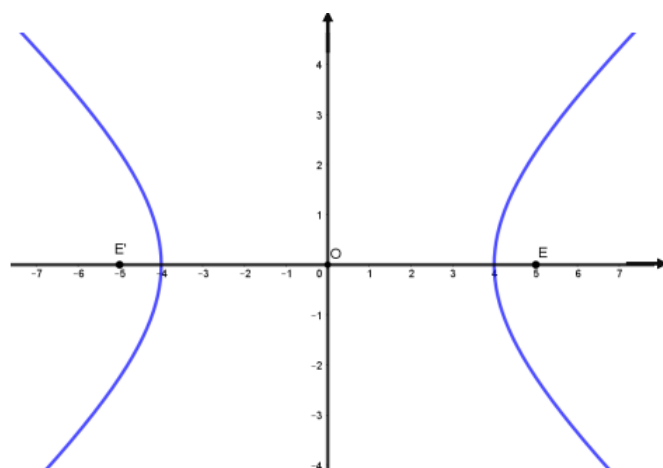
α) $\alpha^2 = 16 \Rightarrow a = 4, \beta^2 = 9 \Rightarrow \beta = 3, \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 = 16 + 9 = 25 \Rightarrow \gamma = 5$

Επομένως οι εστίες είναι οι $E'(-\gamma, 0) = E'(-5, 0)$ και $E(\gamma, 0) = (5, 0)$.

β) $|(NE') - (NE)| = 2a \Rightarrow |(NE') - (NE)| = 2 \cdot 4 = 8$

γ) Η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(-a, 0)$ και $(a, 0)$, οπότε στα σημεία $(-4, 0)$ και $(4, 0)$.

Για $x = 0$ έχουμε $-\frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow y^2 = -9$, αδύνατη. Άρα η υπερβολή δεν τέμνει τον $y'y$.



ΘΕΜΑ 3

α) Είναι $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (2\beta + 3 - (\alpha + 1), \alpha - 7 - (\beta + 2)) = (2\beta - \alpha + 2, \alpha - \beta - 9)$.

Αφού $\overrightarrow{AB} = (-2, -6)$, θα είναι

$$\begin{cases} 2\beta - \alpha + 2 = -2 \\ \alpha - \beta - 9 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta + 4 \\ 2\beta + 4 - \beta - 9 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2\beta + 4 \\ \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Άρα είναι $A(3,1)$, $B(1,-5)$.

β) Τα A, B, Γ είναι συνευθειακά, θα είναι

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ \gamma + 1 - 3 & 2\gamma - 2 - 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ \gamma - 2 & 2\gamma - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -4\gamma + 6 + 6\gamma - 12 = 0 \Rightarrow 2\gamma = 6 \Rightarrow \gamma = 3$$

Οπότε είναι $\Gamma(4,4)$.

γ) Έχουμε ότι $3\overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{A\Gamma} = 5(2,3)$. Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} 3(x_D - x_B, y_D - y_B) - 2(x_\Gamma - x_A, y_\Gamma - y_A) &= (10, 15) \\ \Rightarrow 3(x_D - 1, y_D + 5) - 2(4 - 3, 4 - 1) &= (10, 15) \\ \Rightarrow (3x_D - 3, 3y_D + 15) - (2, 6) &= (10, 15) \\ \Rightarrow (3x_D - 3, 3y_D + 15) &= (10, 15) + (2, 6) \\ \Rightarrow (3x_D - 3, 3y_D + 15) &= (12, 21) \end{aligned}$$

Οπότε θα πρέπει

$$\begin{cases} 3x_D - 3 = 12 \\ 3y_D + 15 = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_D = 15 \\ 3y_D = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 2 \end{cases}$$

Άρα είναι $D(5,2)$.

δ) Είναι $\overrightarrow{A\Gamma} = (4 - 3, 4 - 1) = (1, 3)$ και $\overrightarrow{AD} = (5 - 3, 2 - 1) = (2, 1)$. Οπότε $|\overrightarrow{A\Gamma}| = \sqrt{(1^2 + 3^2)} = \sqrt{10} = 2\sqrt{5}$ και $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Τέλος είναι $\overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AD} = (1, 3) \cdot (2, 1) = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5$.

Οπότε

$$\begin{aligned} \cos(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AD}) &= \frac{(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AD})}{|\overrightarrow{A\Gamma}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} \\ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AD}) &= \frac{5}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} \\ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{AD}) &= \frac{1}{2} = \cos(60^\circ) \end{aligned}$$

Οπότε η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι 60° .

ΘΕΜΑ 4

α) Θα δείξουμε ότι τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά και άρα υποχρεωτικά θα σχηματίζουν τρίγωνο. Πράγματι έχουμε

$$\lambda_{AB} = \frac{4-1}{4-1} = \frac{3}{3} \text{ και } \lambda_{B\Gamma} = \frac{1-4}{3-4} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Αφού $\lambda_{AB} \neq \lambda_{B\Gamma}$, τα τρία σημεία δεν είναι συνευθειακά.

β) Το μέσο Μ του ΒΓ είναι $x_M = \frac{4+3}{2} = \frac{7}{2}$, $y_M = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$. Η μεσοκάθετος (ε) του ΒΓ είναι κάθετη σε αυτό και διέρχεται από το Μ. Αφού είναι κάθετη, θα ισχύει $\lambda_\varepsilon = -\frac{1}{\lambda_{B\Gamma}} = -\frac{1}{3}$. Και αφού διέρχεται από το Μ, θα έχει εξίσωση

$$y - \frac{5}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{6} + \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{3} + \frac{11}{3}$$

γ) Αφού το σημείο Κ είναι σημείο της (ε), θα ικανοποιεί την εξίσωση της. Οπότε θα είναι της μορφής $\left(x, -\frac{x}{3} + \frac{11}{3}\right)$. Επίσης, είναι

$$(KA) = (KB) \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2 = (x-4)^2 + \left(4 + \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2 = (x-4)^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - (x-4)^2 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{3}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 - x^2 + 8x - 16 = \frac{x^2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{1}{9} - \frac{x^2}{9} + \frac{16x}{9} - \frac{64}{9}$$

$$6x - 15 = \frac{18x}{9} - \frac{63}{9}$$

$$6x - 15 = 2x - 7$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

Οπότε είναι $K\left(2, -\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{11}{3}\right) = K(2, 3)$.

Αφού το Κ ανήκει στην μεσοκάθετο του ΒΓ, γνωρίζουμε ότι θα ισαπέχει από τα άκρα του, Β και Γ. Οπότε θα είναι $(KA) = (KB) = (KG)$ με τα Α, Β, Γ να είναι κορυφές τριγώνου που ισαπέχουν από το Κ. Οπότε το Κ είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ