

ΘΕΜΑ 1**A.**

- α) Σωστό
- β) Λάθος
- γ) Σωστό
- δ) Σωστό
- ε) Σωστό

B. Σχ. Βιβλίο σελ. 83**ΘΕΜΑ 2**

α) i) $\lambda_{AB} = \frac{3-1}{2-1} = 2$

ii) (ε): $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 1 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 1$

β) Αντικαθιστούμε τις συντεταγμένες του σημείου Γ στην εξίσωση της (ε) και ελέγχουμε αν επαληθεύεται:

$$\begin{aligned} 5 &= 2 \cdot 2^{100} - 1 \\ \Rightarrow 6 &= 2^{101} \end{aligned}$$

Που δεν ισχύει, άρα το σημείο Γ δεν ανήκει στην ευθεία (ε).

ΘΕΜΑ 3

α) Αρχικά αφού η ευθεία (ε) είναι κάθετη στον άξονα $x'x$, θα είναι της μορφής $x = \kappa$. Πρέπει να βρούμε λοιπόν το κ . Η παραβολή $y^2 = 4x$ έχει $p = 2$ και εστία $E\left(\frac{p}{2}, 0\right) = E(1,0)$. Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $x = 1$. Για να βρούμε που τέμνει την παραβολή, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \text{ ή } y = -2 \end{cases}$$

Επομένως τα σημεία τομής είναι $K(1,2)$ και $\Lambda(1,-2)$.

β) Βρίσκουμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία Κ,Λ.

Για το Κ:

$$\begin{aligned} yy_1 &= p(x + x_1) \\ \Rightarrow 2y &= 2(x + 1) \\ \Rightarrow 2y - 2x &= 2 \end{aligned}$$

Για το Λ:

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow -2y = 2(x + 1) \\ &\Rightarrow -2y - 2x = 2 \end{aligned}$$

Για να βρούμε το σημείο τομής τους, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2y - 2x = 2 \\ -2y - 2x = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2y - 2(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \\ -4x = 4 &\Rightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Επομένως το σημείο τομής είναι το $A(-2,0)$ το οποίο προφανώς ανήκει στον άξονα $x'x$.

$$\gamma) (KL) = \sqrt{(x_K - x_A)^2 + (y_K - y_A)^2} = \sqrt{(1 - 1)^2 + (2 - (-2))^2} = \sqrt{16} = 4$$

και

$$(EA) = \sqrt{(x_E - x_A)^2 + (y_E - y_A)^2} = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{Οπότε } (KL) = 2(EA)$$

ΘΕΜΑ 4

α) i. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου έχουμε $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

Άρα έχουμε

$$|\overrightarrow{OG}| = |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$$

Οπότε

$$|\overrightarrow{OG}|^2 = (\vec{\alpha} + \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$$

$$\text{ii. } |\overrightarrow{AB}|^2 = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 = (\vec{\beta} - \vec{\alpha})^2 = \vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$$

β) Αν είναι $|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{AB}|$, το παραλληλόγραμμο $OAGB$ έχει ίσες διαγωνίους άρα είναι ορθογώνιο.