

ΘΕΜΑ 1

A.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Λάθος

B. Σχ. Βιβλίο σελ. 60

ΘΕΜΑ 2

α) $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -8 & -4 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-4) - 1 \cdot (-8) = -8 + 8 = 0 \Rightarrow \vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$

β) $\vec{\beta} = (-8, -4) = -4(2, 1) = -4\vec{\alpha}$

γ) $|\vec{\beta}| = |-4\vec{\alpha}| = |-4||\vec{\alpha}| = 4|\alpha|$

ΘΕΜΑ 3

α) $x^2 - y^2 = 8 \Rightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1.$

Οπότε $\alpha^2 = \beta^2 = 8.$

Η εφαπτομένη στο $M(3,1)$ έχει εξίσωση:

$$\begin{aligned} \varepsilon: \frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{3x}{8} - \frac{y}{8} &= 1 \\ \Rightarrow 3x - y &= 8 \end{aligned}$$

β) Η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -\frac{A}{B} = -\frac{3}{-1} = 3.$

Αν λ_1 ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (δ) , θα πρέπει να ισχύει

$$\lambda \cdot \lambda_1 = -1 \Rightarrow 3 \cdot \lambda_1 = -1 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-1}{3}.$$

Ακόμα, αφού διέρχεται από το σημείο $M(3,1)$, η εξίσωση της θα είναι

$$(\delta): y - 1 = \frac{-1}{3}(x - 3) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}x + 1 \Rightarrow 3y - 3 = -x + 3 \Rightarrow$$

$$3y + x - 6 = 0.$$

γ) Βρίσκουμε πού τέμνει η (δ) τους άξονες:

Για $x = 0$:

$$3y + 0 - 6 = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2$$

Άρα τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0,2)$.

Για $y = 0$:

$$3 \cdot 0 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$$

Άρα τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $\Gamma(-6,0)$.

Το μέσο του τμήματος $B\Gamma$ έχει συντεταγμένες

$$\left(\frac{0+6}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (3,1)$$

Άρα αφού είναι $M(3,1)$, το M είναι μέσο του $B\Gamma$.

ΘΕΜΑ 4

α) Αφού το $OB\Delta E$ είναι τετράγωνο και είναι εξωτερικά του τριγώνου, οι συντεταγμένες των κορυφών Δ και E θα είναι $\Delta(\kappa, -\kappa)$ και $E(0, -\kappa)$. Όμοια για το τετράγωνο $OGZH$, θα είναι $Z(-2\kappa, 2\kappa)$ και $H(-2\kappa, 0)$. Η ευθεία $\Gamma\Delta$ έχει συντελεστή διεύθυνσης:

$$\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{-\kappa - 2\kappa}{\kappa - 0} = -3$$

Οπότε η εξίσωση της είναι

$$y - 2\kappa = -3(x - 0) \Rightarrow y = -3x + 2\kappa$$

Η ευθεία BZ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{BZ} = \frac{2\kappa - 0}{-2\kappa - \kappa} = -\frac{2}{3}$$

Οπότε η εξίσωση της είναι

$$y - 0 = -\frac{2}{3}(x - \kappa) \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\kappa$$

β) Έστω OM το ύψος του τριγώνου $OB\Gamma$. Θα είναι λοιπόν $OM \perp B\Gamma \Rightarrow \lambda_{OM}\lambda_{B\Gamma} = -1$.

Είναι $\lambda_{B\Gamma} = \frac{2\kappa-0}{0-\kappa} = -2$, οπότε $\lambda_{OM} = \frac{1}{2}$ και αφού διέρχεται από το $O(0,0)$ θα έχει εξίσωση

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

γ) Αρκεί να δείξουμε ότι το σημείο τομής δύο εκ των τριών ευθειών ανήκει και στην τρίτη ευθεία. Για να βρούμε π.χ το σημείο τομής του ύψους και της $\Gamma\Delta$, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τους:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ y = -3x + 2\kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -3 \cdot 2y + 2\kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = -6y + 2\kappa \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ 7y = 2\kappa \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4\kappa}{7} \\ y = \frac{2\kappa}{7} \end{cases}$$

Άρα τέμνονται στο σημείο $N\left(\frac{4\kappa}{7}, \frac{2\kappa}{7}\right)$. Τώρα θα δείξουμε ότι οι συντεταγμένες του επαληθεύουν και την εξίσωση της ΒΖ. Πράγματι, αντικαθιστούμε στην εξίσωση της και έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{2\kappa}{7} &= -\frac{2}{3}\left(\frac{4\kappa}{7}\right) + \frac{2}{3}\kappa \\ \Rightarrow \frac{2\kappa}{7} &= -\frac{8\kappa}{21} + \frac{2\kappa}{3} \\ \Rightarrow \frac{2\kappa}{7} &= -\frac{8\kappa}{21} + \frac{14\kappa}{21} \\ \Rightarrow \frac{2\kappa}{7} &= \frac{6\kappa}{21},\end{aligned}$$

Που ισχύει. Άρα και οι 3 ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, $N\left(\frac{4\kappa}{7}, \frac{2\kappa}{7}\right)$.