

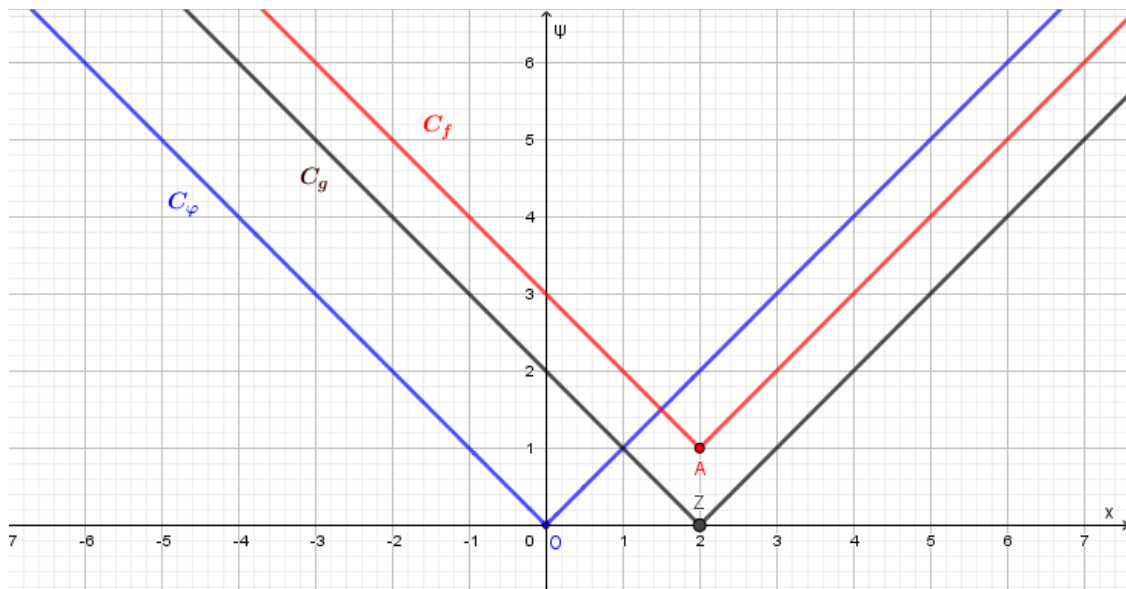
ΘΕΜΑ 1

- A. α) Σωστό
 β) Λάθος
 γ) Σωστό
 δ) Λάθος
 ε) Λάθος

B. Από σχολικό βιβλίο

ΘΕΜΑ 2

- α) Οι γραφικές παραστάσεις των g και f προκύπτουν από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ :
- μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (για την g) και
 - μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (για την f).
- Έτσι προκύπτουν οι γραφικές παραστάσεις



- β) i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
 ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 2$, ολικό ελάχιστο το $f(2) = 1$.

ΘΕΜΑ 3

α) $P(-1) = \alpha(-1) + \beta(-1)^2 - 7(-1) + \alpha - \beta + 5 = -\alpha + \beta + 7 + \alpha - \beta + 5 = 12$

β) Αφού έχει παράγοντα το $(x-1)$, θα είναι $P(1) = 0$

Ακόμα, αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x-3$ είναι 12, θα είναι $P(3) = 12$. Άρα έχουμε :

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(3) = 12 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

γ) Για $\alpha = 1, \beta = 0$ είναι $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Horner με το 1 :

$$\left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -7 & 6 & 1 \\ & 1 & 1 & -6 & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 & \end{array} \right|$$

$$\text{Άρα : } P(x) \leq 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-6) \leq 0$$

x	$-\infty$	-3		1		2	$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+		+
x^2+x-6	+	0	-		-	0	+
P(x)	-	0	+	0	-	0	+

Άρα η ανίσωση ισχύει όταν $x \in (-\infty, -3] \cup [1, 2]$

ΘΕΜΑ 4

α) Πρέπει $2^x + 1 > 0$ που ισχύει πάντα .

Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το R.

β) $2x \log 2 + f(x) = f(\log_2 11) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2x \log 2 + \log(2^x + 1) = \log(2^{\log_2 11} + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 2^{2x} + \log(2^x + 1) = \log(12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log[2^{2x}(2^x + 1)] = \log(12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{3x} + 2^{2x} = 12 \Rightarrow 2^{3x} + 2^{2x} - 12 = 0$$

Θέτουμε $y = 2^x$ και έχουμε :

$$y^3 + y^2 - 12 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow y = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

γ) Είναι $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$ από τύπο αλλαγής βάσης.

$$\text{Άρα } f\left(\frac{\ln 3}{\ln 2}\right) = \log(2^{\log_2 3} + 1) = \log(3+1) = \log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2$$

δ) $f(x) + f(-x) \leq f(3) - f(0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log(2^x + 1) + \log(2^{-x} + 1) \leq \log(2^3 + 1) - \log(2^0 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log[(2^x + 1)(2^{-x} + 1)] \leq \log\left(\frac{9}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2^x + 1)(2^{-x} + 1) \leq \frac{9}{2} \Rightarrow 1 + 2^x + 2^{-x} + 1 \leq \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 + 2^x + \frac{1}{2^x} \leq \frac{9}{2} \Rightarrow 4 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{2x} + 2 \leq 9 \cdot 2^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2 \leq 0$$

Θέτουμε $y = 2^x$ και έχουμε :

$$2y^2 - 5y + 2 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 2 \Rightarrow 2^{-1} \leq 2^x \leq 2^1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$