

ΘΕΜΑ 1

- A. α) Σωστό
 β) Λάθος
 γ) Σωστό
 δ) Σωστό
 ε) Λάθος

B. Από σχολικό βιβλίο

ΘΕΜΑ 2

α) $P(-1) = 3(-1)^2 - 1 - 1 = 1$
 $P(3) = 3 \cdot 3^2 + 3 - 1 = 29$

β) $P(-2) = Q(-2) \Rightarrow 3(-2)^2 - 2 - 1 = 2(-2) + \alpha \Rightarrow$
 $\Rightarrow 12 - 2 - 1 = -4 + \alpha \Rightarrow \alpha = 13$

γ) Για $\alpha = 13$ είναι $Q(x) = 2x + 13$

$$\begin{cases} x + 2y = P(1) \\ 2x - 3y = Q(0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - 3y = 13 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 3

α) Αφού έχει παράγοντα το $x + 2$ θα είναι $P(-2) = 0$

Ακόμα, αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x + 1$ είναι 4, θα είναι $P(-1) = 4$

Άρα
$$\begin{cases} P(-2) = 0 \\ P(-1) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot (-2)^3 - \kappa \cdot (-2)^2 - 13 \cdot (-2) - \lambda + 1 = 0 \\ 2 \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) - \lambda + 1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = 7 \end{cases}$$

β) $P(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - x^2 - 13x - 6 = 0 \xRightarrow[\text{Homer}]{\text{ρίζα το } -2} (x + 2)(2x^2 - 5x - 3) = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x + 2 = 0 \quad \text{ή} \quad \Rightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0$
 $\Rightarrow x = -2 \quad \text{ή} \quad \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad x = 3$

γ) Θέτουμε: $\sin x = y$ και η εξίσωση γράφεται: $2y^3 - y^2 - 13y - 6 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

β) $\Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin x = -2$ ή $\Rightarrow \sin x = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ή $\Rightarrow y = 3$
 αδύνατη $\Rightarrow \sin x = 3$
 αδύνατη

$$\Rightarrow \sin x = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Πρέπει : $8^x - 4^x > 0 \Rightarrow 2^{3x} > 2^{2x} \Rightarrow 3x > 2x \Rightarrow x > 0$

Και : $2^{x+2} - 4 > 0 \Rightarrow 2^{x+2} > 2^2 \Rightarrow x > 0$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$

β)
$$e^{f(x)} = e^{\ln(8^x - 4^x) - \ln(2^{x+2} - 4)} = \frac{e^{\ln(8^x - 4^x)}}{e^{\ln(2^{x+2} - 4)}} = \frac{8^x - 4^x}{2^{x+2} - 4} = \frac{4^x \cdot 2^x - 4^x}{4 \cdot 2^x - 4} = \frac{4^x(2^x - 1)}{4(2^x - 1)} = \frac{4^x}{4} = 4^{x-1}$$

γ) $f(x) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln(8^x - 4^x) - \ln(2^{x+2} - 4) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(8^x - 4^x) > \ln(2^{x+2} - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8^x - 4^x > 2^{x+2} - 4 \Rightarrow 2^{3x} - 2^{2x} > 2 \cdot 2^x - 4$$

Θέτουμε $y = 2^x$ και έχουμε : $y^3 - y^2 - 2y + 4 > 0$

Ρίζα το $y = 1$

Με Horner βρίσκουμε $(y-1)(y^2-4) > 0$

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$y-1$	-		0	+	+
y^2-4	+	0	-		+
γινόμενο	-	0	+	0	+

Άρα η ανίσωση ισχύει όταν :

$$-2 < y < 1$$

$$y > 2$$

$$\Rightarrow -2 < 2^x < 1$$

$$\Rightarrow 2^x > 2$$

$$\Rightarrow 2^x < 2^0$$

$$\Rightarrow 2^x > 2^1$$

$$\Rightarrow x < 0$$

$$\Rightarrow x > 1$$

Όμως συναληθεύουμε με το πεδίο ορισμού της f , οπότε τελικά η ανίσωση ισχύει για $x > 1$

δ) $2^{\log \alpha x} \cdot e^{\frac{f(2)}{2}} \geq x^{1+\log \frac{2}{\alpha}} \Rightarrow 2^{\log \alpha x} \cdot (e^{f(2)})^{\frac{1}{2}} \geq x^{1+\log \frac{2}{\alpha}} \Rightarrow$

$$\stackrel{\beta)}{\Rightarrow} 2^{\log \alpha x} \cdot (4^{2-1})^{\frac{1}{2}} \geq x^{1+\log \frac{2}{\alpha}} \Rightarrow 2^{\log \alpha x} \cdot \frac{1}{2} \geq x^{1+\log \frac{2}{\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\log \alpha x - 1} \geq x^{1+\log \frac{2}{\alpha}}$$