

ΘΕΜΑ 1

- A. α) Σωστό
β) Λάθος
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Λάθος

B. Έστω $\log_{\alpha} \theta = x$

$$\text{Τότε } \alpha^x = \theta \Rightarrow \alpha^{\kappa x} = \theta^{\kappa}$$

Από τον ορισμό του λογάριθμου έχουμε :

$$\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa x \Rightarrow \log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \log_{\alpha} \theta$$

ΘΕΜΑ 2

- α) i. Η συνάρτηση είναι της μορφής $f(x) = \rho \sin \omega x$, $\rho > 0$ με $\rho=3$ και $\omega = 2$, οπότε η μέγιστη τιμή της f είναι ίση με 3 και η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με -3.
ii. Η περίοδος της f είναι $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$.
β) $f(x) = -3$ αν και μόνο αν $3 \sin 2x = -3 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$ τότε
 $2x = 2\kappa\pi \pm \pi \Leftrightarrow x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

ΘΕΜΑ 3

α) Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ θα είναι $P(1)=0$

Ακόμα, αφού η διαίρεση του με το $x-2$ δίνει υπόλοιπο -4 , θα είναι $P(2)=-4$

$$\text{Άρα } \begin{cases} P(1)=0 \\ P(2)=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1^3 - 2 \cdot 1 - \kappa \cdot 1 + \lambda = 0 \\ 8 - 2 \cdot 4 - 2\kappa + \lambda = -4 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \kappa = 5 \\ \lambda = 6 \end{cases}$$

β) Είναι $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Ξέρουμε ότι το 1 είναι ρίζα, άρα κάνουμε Horner και βρίσκουμε :

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

$$\text{Άρα } P(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x-1 &= 0 & \text{ή} & \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \\ \Rightarrow x &= 1 & & \Rightarrow x = -2 \text{ ή } x = 3 \end{aligned}$$

γ) $P(x) \geq 4 - 4x \Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) \geq 4 - 4x \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) + 4(x-1) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 2) \geq 0$$

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x-1$	-		0	+	+
x^2-x-2	+	0	-		+
$P(x)$	-	0	+	0	+

Άρα η ανίσωση $P(x) \geq 4 - 4x$ ισχύει για $x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4

$$\alpha) \text{ Έχουμε: } \begin{cases} \ln f(1) = \alpha \cdot 1 + \beta \\ \ln f(2) = \alpha \cdot 2 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln 2 = \alpha + \beta \\ \ln 4 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln 2 = \alpha + \beta \\ 2\ln 2 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \ln 2 - \alpha \\ 2\ln 2 = 2\alpha + \ln 2 - \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \alpha = \ln 2 \end{cases}$$

$$\beta) \quad \ln f(x) = (\ln 2)x \Rightarrow \ln f(x) = \ln 2^x \Rightarrow f(x) = 2^x$$

$$\gamma) \quad f(2\ln x) - (1 + e^{\ln 2 \cdot \ln 3})f(\ln x) + f(\ln 3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2\ln x} - (1 + 2^{\ln 3}) \cdot 2^{\ln x} + 2^{\ln 3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{2\ln x} - 2^{\ln x} - 2^{\ln 3} \cdot 2^{\ln x} + 2^{\ln 3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\ln x} (2^{\ln x} - 2^{\ln 3}) - 2^{\ln x} + 2^{\ln 3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2^{\ln x} - 1)(2^{\ln x} - 2^{\ln 3}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\ln x} = 1 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow 2\ln x = 2^{\ln 3}$$

$$\Rightarrow \ln x = 0 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \ln x = \ln 3$$

$$\Rightarrow x = 1 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow x = 3$$