

ΘΕΜΑ 1

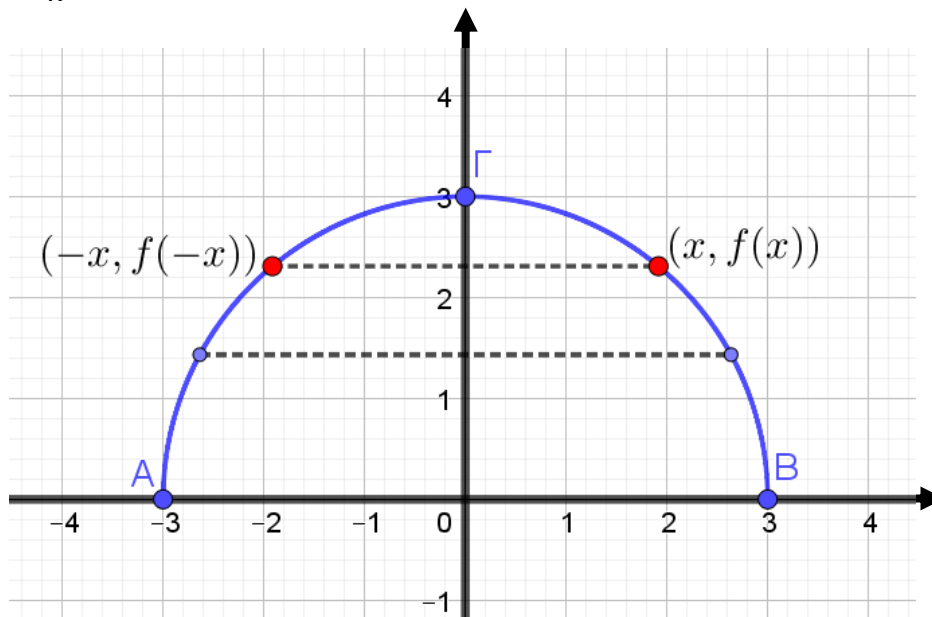
- A. α) Σωστό
 β) Λάθος
 γ) Λάθος
 δ) Λάθος
 ε) Σωστό

B. Στην ταυτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ θέτουμε $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega}$ και έχουμε :

$$\eta\mu^2\omega + \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega} = 1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+\epsilon\phi^2\omega} = \eta\mu^2\omega \Leftrightarrow \frac{\epsilon\phi^2\omega}{1+\epsilon\phi^2\omega} = \eta\mu^2\omega$$

ΘΕΜΑ 2

- α) Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης έχουν τετμημένες x από -3 έως 3 . Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το διάστημα $\Delta = [-3, 3]$.
- β) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$, που σημαίνει ότι τα σημεία $(x, f(x))$ και $(-x, f(-x))$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Από το σχήμα έχουμε ότι $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$, άρα η συνάρτηση είναι άρτια.
- γ) Παρατηρούμε ότι η τιμή $3 = f(0)$ είναι η μέγιστη τιμή της f και η θέση μεγίστου είναι η $x = 0$. Ακόμα, η ελάχιστη τιμή της f είναι ο αριθμός $0 = f(3) = f(-3)$ και υπάρχουν δύο θέσεις ελαχίστου, οι $x = 3$ και $x = -3$.



ΘΕΜΑ 3

- α) Αρχικά το $P(x)$ θα είναι $3^{\text{ου}}$ βαθμού, αφού διαιρείται με το $x^2 + 3x - 1$ ($2^{\text{ου}}$ βαθμού) και δίνει πηλίκο $x - 2$ ($1^{\text{ου}}$ βαθμού).

Άρα έστω $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

Κάνουμε την διαίρεση :

$$\begin{array}{r|l} \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta & x^2 + 3x - 1 \\ -\alpha x^3 - 3\alpha x^2 + \alpha x & \alpha x(\beta - 3\alpha) \\ \hline (\beta - 3\alpha)x^2 + (\gamma + \alpha)x + \delta & \\ -(\beta - 3\alpha)x^2 - 3(\beta - 3\alpha)x + \beta - 3\alpha & \\ \hline (\gamma - 3\beta + 10\alpha)x + \delta + \beta - 3\alpha & \end{array}$$

Αφού μας δίνεται το πηλίκο και το υπόλοιπο, θα ισχύει :

$$\begin{cases} \alpha x + \beta - 3\alpha = x - 2 \\ (\gamma - 3\beta + 10\alpha)x + \delta + \beta - 3\alpha = 4x + 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta - 3\alpha = -2 \\ \gamma - 3\beta + 10\alpha = 4 \\ \delta + \beta - 3\alpha = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = -3 \\ \delta = 8 \end{cases}$$

Επομένως $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 8$

β) $P(2) = 2^3 + 2^2 - 3 \cdot 2 + 8 = 14$

$P(1) = 1^3 + 1^2 - 3 \cdot 1 + 8 = 7$

$$\frac{P(2)}{x^2 - 1} + \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{P(1)}{x - 1} + 4 \Rightarrow \frac{14}{x^2 - 1} + \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \frac{7}{x - 1} + 4$$

Περιορισμοί : $x \neq 1$ και $x \neq -1$

Με τον περιορισμό αυτό πολλαπλασιάζουμε με $(x - 1)(x + 1)$ και έχουμε :

$$\frac{14(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} + \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}(x - 1)(x + 1) = \frac{7}{x - 1}(x - 1)(x + 1) + 4(x - 1)(x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 + (x^2 + x + 1)(x - 1) = 7(x + 1) + 4(x - 1)(x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 + x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = 7x + 7 + 4x^2 - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$$

Ρίζα το 1. Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -4 & -7 & 10 & 1 \\ & 1 & -3 & -10 & \\ \hline 1 & -3 & -10 & 0 & \end{array}$$

Άρα : $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 3x - 10) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

αδύνατη

ή

$$\Rightarrow x = -2$$

ή

$$\Rightarrow x = 5$$

ΘΕΜΑ 4

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} < 1$

Όμως για $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ είναι $\begin{cases} 0 < \sigma\upsilon\nu\alpha < 1 \\ 0 < \eta\mu\alpha < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\alpha < 1 \\ \eta\mu\alpha + 1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha + 1} < 1$

Άρα η $f(x) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha + 1} \right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα

β) $f(1) + f(-1) = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} \right)^1 + \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} \right)^{-1} =$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \eta\mu\alpha} + \frac{1 + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + (1 + \eta\mu\alpha)^2}{(1 + \eta\mu\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma \nu^2 \alpha + 1 + \eta \mu^2 \alpha + 2 \eta \mu \alpha}{(1 + \eta \mu \alpha) \sigma \nu \alpha} = \frac{2 + 2 \eta \mu \alpha}{(1 + \eta \mu \alpha) \sigma \nu \alpha} = \frac{2}{\sigma \nu \alpha}$$

$$\gamma) \quad f(2) = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{\sigma \nu \alpha}{1 + \eta \mu \alpha} \right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sigma \nu^2 \alpha}{(1 + \eta \mu \alpha)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma \nu^2 \alpha}{1 + 2 \eta \mu \alpha + \eta \mu^2 \alpha} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 - \eta \mu^2 \alpha}{1 + 2 \eta \mu \alpha + \eta \mu^2 \alpha} = \frac{1}{3}$$

Θέτουμε $y = \eta \mu \alpha$ και έχουμε :

$$\frac{1 - y^2}{1 + 2y + y^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3 - 3y^2 = 1 + 2y + y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4y^2 + 2y - 2 = 0 \Rightarrow 2y^2 + y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -1 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \eta \mu \alpha = -1 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \eta \mu \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \eta \mu \alpha = \eta \mu \frac{3\pi}{2} \qquad \qquad \text{ή} \qquad \qquad \Rightarrow \eta \mu \alpha = \eta \mu \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \alpha = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \alpha = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$$

Αφού $\alpha \in (0^\circ, 90^\circ)$, θα είναι $\alpha = \frac{\pi}{6}$