

ΘΕΜΑ 1

- A. α) Σωστό
 β) Σωστό
 γ) Λάθος
 δ) Σωστό
 ε) Λάθος

B. Από σχολικό βιβλίο.

ΘΕΜΑ 2

α) $\alpha = 2 \log 2 + 2 \log 3 - \log 12 = \log 2^2 + \log 3^2 - \log 12 =$
 $= \log 4 + \log 9 - \log 12 = \log \left(\frac{4 \cdot 9}{12} \right) = \log 3$

β) $\beta = 5 + 10^\alpha = 5 + 10^{\log 3} = 5 + 3 = 8$

γ) $\log_4 \beta = \log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2}$

ΘΕΜΑ 3

α) Ρίζα το -1. Κάνουμε Horner και έχουμε :

$$2x^3 + 2x^2 - x - 1 = (x+1)(2x^2 - 1)$$

Άρα $2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow (x+1)(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= -1 & \text{ή} & \Rightarrow 2x^2 = 1 \\ \Rightarrow x &= -1 & & \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

β) Αρχικά είναι $\sin 2x = 1 - 2\eta\mu^2 x$

Οπότε : $2\eta\mu^3 x - \eta\mu x = \sin 2x \Rightarrow 2\eta\mu^3 x - \eta\mu x = 1 - 2\eta\mu^2 x \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\eta\mu^3 x + 2\eta\mu^2 x - \eta\mu x - 1 = 0$$

Θέτουμε $y = \eta\mu x$ και έχουμε :

$$2y^3 + 2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= -1 & \Rightarrow y &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow y &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \eta\mu x &= -1 & \Rightarrow \eta\mu x &= \frac{\sqrt{2}}{2} & \Rightarrow \eta\mu x &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \eta\mu x &= \eta\mu \frac{3\pi}{2} & \Rightarrow \eta\mu x &= \eta\mu \frac{\pi}{4} & \Rightarrow \eta\mu x &= \eta\mu \frac{3\pi}{4} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases} & \text{ή} & \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4} \end{cases} & \text{ή} & \Rightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \\ \text{ή} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

γ) $2 \cdot 4^{3x} + 2 \cdot 4^{2x} - 4^x - 1 \leq 0$

Θέτουμε $y = 4^x$ και έχουμε :

$$2y^3 + 2y^2 - y - 1 \leq 0 \Rightarrow (y+1)(2y^2 - 1) \leq 0$$

Ο πίνακας προσήμων
του $(y+1)(2y^2 - 1)$
φαίνεται στον
παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
y+1	-	0	+	+	+
$2y^2-1$	+	+	0	-	+
γινόμενο	-	0	+	-	+

Άρα η ανίσωση ισχύει όταν :

$$\begin{aligned} y < -1 & \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < y < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} < 4^x < \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow 4^x < -1 & \quad \text{ή} \quad \Rightarrow 4^x < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2^{2x} < 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2x < \frac{1}{2} \\ \text{αδύνατη} & \quad \Rightarrow x < -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Αφού $-2 < -1$ και f γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$ είναι $f(-2) > f(-1)$.
Επίσης f άρτια οπότε $f(-2) = f(2)$. Συνεπώς $f(-1) < f(2)$.

β) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,3]$, οπότε $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [0,3]$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-3,0]$, οπότε $f(-3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [0,3]$.

Επίσης f άρτια οπότε $f(-3) = f(3)$.

Συνεπώς $f(3) \geq f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$.

γ) Αφού $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in [-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0, που είναι και η μοναδική θέση ελαχίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x) > f(0)$ για κάθε $x \in [-3,0) \cup (0,3]$.

Αφού $f(x) \leq f(3)$ για κάθε $x \in [-3,3]$, συμπεραίνουμε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο στο 3, όπως και στο -3 αφού $f(-3) = f(3)$, που είναι και οι μοναδικές θέσεις μεγίστου, αφού λόγω μονοτονίας $f(x) < f(3)$ για κάθε $x \in (-3,3)$.

δ) Από τους 4 τύπους μόνο ο α. και ο β. έχουν πεδίο ορισμού το $[-3,3]$.

Επίσης για τον τύπο α. ισχύει $f(0) > f(3)$ οπότε δεν μπορεί να αντιστοιχεί στη συνάρτηση του προβλήματος. Συνεπώς ο σωστός τύπος είναι ο β. $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = -\sqrt{9 - x^2}$.

