

ΘΕΜΑ 1

- A. α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Σωστό

B. Έστω: $\log_{\alpha} \theta = x$

Τότε: $\alpha^x = \theta \Rightarrow \alpha^{kx} = \theta^k$

Από τον ορισμό του λογαρίθμου έχουμε:

$$\log_{\alpha} \theta^k = kx \Rightarrow \log_{\alpha} \theta^k = k \log_{\alpha} \theta$$

ΘΕΜΑ 2

α) Το συνημίτονο μιας γωνίας σχεδιασμένης στον τριγωνομετρικό κύκλο είναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της με τον κύκλο. Επειδή η τετμημένη του σημείου A

είναι $0,6 = \frac{3}{5}$, έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5}$.

β) i. Εφόσον η ΟΓ είναι προέκταση της ΟΑ έχουμε $\widehat{AOG} = \pi \text{ rad}$. Επομένως $\widehat{BOG} = \hat{\phi} = \pi + \hat{\omega}$.

ii. Το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\phi}$ είναι η τετμημένη του σημείου Γ, δηλαδή $\sigma\upsilon\nu\phi = -\frac{3}{5}$.

ΘΕΜΑ 3

α) Αφού έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -2, θα ισχύει:

$$\begin{cases} P(1) = 0 \\ P(-2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - (\ln \beta^2 - 1) - 7 + \ln(\alpha\beta) - 2 + 6 = 0 \\ 16 + 8(\ln \beta^2 - 1) - 28 + (\ln(\alpha\beta) - 2)(-2) + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} \ln \alpha = 2 \\ \ln \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = e^2 \\ \beta = e \end{cases}$$

β) Για $\alpha = e^2$, $\beta = e$ έχουμε:

$$P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$$

Ρίζα το 1. Κάνουμε Horner και έχουμε:

$$P(x) = (x-1)(x^3 - 7x - 6)$$

Και πάλι Horner (ρίζα το -1) και έχουμε: $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2 - x - 6)$

Τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-2	-1	1	3	$+\infty$			
x-1	-	-	-	0	+	+			
x+1	-	-	0	+	+	+			
x^2-x-6	+	0	-	-	-	0	+		
P(x)	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Άρα $P(x) \leq 0$ για $x \in [-2, -1] \cup [1, 3]$

ΘΕΜΑ 4

α) Ο τύπος της συνάρτησης f διαδοχικά γράφεται:

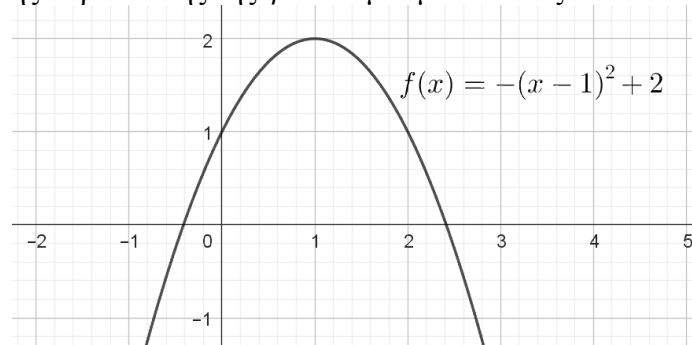
$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 =$$

$$\begin{aligned}
 &= -x^2 + 2x - 1 + 2 = \\
 &= -(x^2 - 2x + 1) + 2 = \\
 &= -(x - 1)^2 + 2.
 \end{aligned}$$

Εναλλακτικά, ξεκινώντας από το ζητούμενο έχουμε:

$$\begin{aligned}
 &-(x - 1)^2 + 2 = \\
 &= -(x^2 - 2x + 1) + 2 = \\
 &= -x^2 + 2x - 1 + 2 = \\
 &= -x^2 + 2x + 1 = f(x).
 \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $f(x) = \varphi(x - 1) + 2$. Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά μία μονάδα δεξιά και δύο μονάδες απάνω:



- β) i.** Από τη γραφική της παράσταση, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.
- ii.** Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 2$.
- iii.** Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$ είναι οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την οριζόντια ευθεία $y = \kappa$.
Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι για $\kappa < 2$, υπάρχουν δύο σημεία τομής. Άρα, η εξίσωση έχει δύο ρίζες.

