

ΘΕΜΑ 1

- A. α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Λάθος
ε) Σωστό

B. Έστω ότι είναι : $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1$ και $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2$

Τότε : $\alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\alpha^{x_2} = \theta_2$

Οπότε : $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \Rightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$

Άρα από τον ορισμό του λογαρίθμου , $\log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2$

δηλαδή $\log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$

ΘΕΜΑ 2

α) Αφού το 1 είναι ρίζα $P(1) = 0 \Rightarrow 1^3 - 7 \cdot 1 + \kappa = 0 \Rightarrow \kappa = 6$

β) i) Είναι $P(x) = x^3 - 7x + 6$

Ρίζα το 1 , άρα κάνουμε Horner :

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Οπότε : $P(x) = (x-1)(x^2 + x - 6)$

ii) $P(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow x-1=0 & \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \\ \Rightarrow x=1 & \text{ή} \\ & \Rightarrow x=2 \text{ ή } x=-3 \end{array}$$

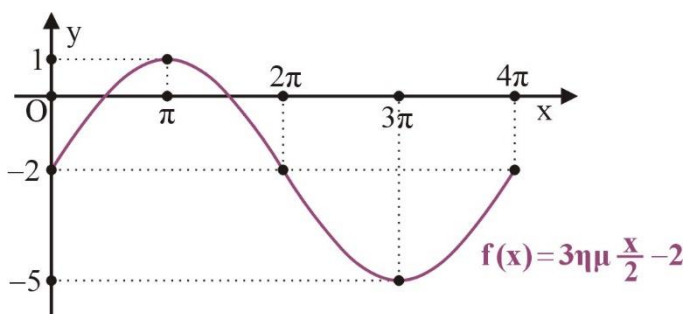
ΘΕΜΑ 3

α) Μέγιστη τιμή : $3 \cdot 1 - 2 = 1$

Ελάχιστη τιμή : $3(-1) - 2 = -5$

Περίοδος : $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

β)



γ) $f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3\eta\mu \frac{x}{2} - 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 3\eta\mu \frac{x}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \eta\mu \frac{x}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{x}{2} &= 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} & \Rightarrow x &= 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow x &= 4\kappa\pi + \frac{\pi}{3} & \Rightarrow x &= 4\kappa\pi + \frac{5\pi}{3}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4

α) $2x^3 - x - 1 = 0$ Ρίζα το 1.

$$\text{Horner : } \begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ & & 2 & 2 & 1 & \\ \hline & 2 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$$\text{Άρα : } 2x^3 - x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(2x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \quad \text{ή} \quad \Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x=1 \quad \text{αδύνατη}$$

$$\text{Άρα : } x=1$$

β) $\ln(2e^{2x} - 1) > -x \Rightarrow \ln(2e^{2x} - 1) > \ln e^{-x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2e^{2x} - 1 > e^{-x} \Rightarrow 2e^{3x} - e^x > 1 \Rightarrow 2e^{3x} - e^x - 1 > 0$$

Θέτουμε : $y = e^x$ και έχουμε :

$$2y^3 - y - 1 > 0 \stackrel{(\alpha)}{\Rightarrow} (y-1)(2y^2 + 2y + 1) > 0 \Rightarrow$$

$$\stackrel{2y^2 + 2y + 1 > 0}{\Rightarrow} y-1 > 0 \Rightarrow y > 1 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$$

γ) $x^{2\log^2 x} = 100^{\log x + 1}$

Πρέπει $x > 0$. Με τον περιορισμό αυτό λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε :

$$\log x^{2\log^2 x} = \log 10^{\log x + 1} \Rightarrow 2\log^2 x \cdot \log x = (\log x + 1) \cdot \log 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\log^3 x = (\log x + 1) \Rightarrow 2\log^3 x = \log x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\log^3 x - \log x - 1 = 0$$

Θέτουμε $y = \log x$ και έχουμε :

$$2y^3 - y - 1 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} y = 1 \Leftrightarrow \log x = 1 \Leftrightarrow x = 10$$