

ΘΕΜΑ 1

- A. α) Λάθος
 β) Σωστό
 γ) Σωστό
 δ) Σωστό
 ε) Σωστό

B. $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega} = 1$

ΘΕΜΑ 2

- α) Στο τραπέζι υπάρχουν 5 παιδιά επιπλέον από τους γονείς, τότε η εξίσωση που προκύπτει είναι $y = x + 5$ (1).

Επίσης, το ποσό που πλήρωσαν οι γονείς είναι $12x$ και το ποσό που πλήρωσαν τα παιδιά είναι $6y$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι: $12x + 6y = 300$ (2)

Το σύστημα των δύο εξισώσεων είναι το Γ, δηλαδή $\begin{cases} y = x + 5 \\ 12x + 6y = 300 \end{cases}$

- β) Λύνουμε το σύστημα Γ των δύο εξισώσεων (1) και (2) του πρώτου ερωτήματος.

Με αντικατάσταση της (1) στην (2) προκύπτει

$12x + 6(x + 5) = 300 \Leftrightarrow 12x + 6x + 30 = 300 \Leftrightarrow 18x = 270 \Leftrightarrow x = 15$ και το y προκύπτει αν στην (1) αντικαταστήσουμε το x , δηλαδή $y = 15 + 5 = 20$.

Άρα, οι γονείς ήταν 15 και τα παιδιά 20.

ΘΕΜΑ 3

α) $f(-x) = \sigma\upsilon\nu(-x) - \eta\mu(-x) = \sigma\upsilon\nu x - (-\eta\mu x) = \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x$

β) $f(x) \cdot f(-x) = (\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x) =$
 $= \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 \omega} - \frac{\varepsilon\varphi^2 \omega}{1 + \varepsilon\varphi^2 \omega} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 \omega}{1 + \varepsilon\varphi^2 \omega}$

γ) Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x \Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = 2\kappa\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x \quad \text{αδύνατη}$

$\Rightarrow 2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

Για $\kappa = 0$ έχουμε $x = \frac{\pi}{4}$

Άρα ένα ζητούμενο σημείο είναι το $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$

ΘΕΜΑ 4

- α) Λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη και έχουμε :

$$\alpha^{\log \beta} = \beta^{\log \alpha} \Rightarrow \log \alpha^{\log \beta} = \log \beta^{\log \alpha} \Rightarrow \\ \Rightarrow \log \beta \cdot \log \alpha = \log \alpha \cdot \log \beta \quad \text{που ισχύει}$$

$$\beta) \quad 5^{2 \log x} = 5 + 4x^{\log 5} \stackrel{\alpha)}{\Rightarrow} 5^{2 \log x} = 5 + 4 \cdot 5^{\log x} \Rightarrow \\ \Rightarrow 5^{2 \log x} - 4 \cdot 5^{\log x} - 5 = 0$$

Θέτουμε $5^{\log x} = y$ με τον περιορισμό $x > 0$ και έχουμε :

$$y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -1$$

$$\Rightarrow 5^{\log x} = -1$$

$$\quad \quad \quad \text{ή} \quad \quad \quad \Rightarrow y = 5$$

$$\Rightarrow 5^{\log x} = 5 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = 10$$

αδύνατη

$$\gamma) \quad 3^{\log \sin x} + (\sin x)^{\log 3} = 2 \cdot \sqrt{3}^{-\log 2} \Rightarrow$$

$$\stackrel{\alpha)}{\Rightarrow} (\sin x)^{\log 3} + (\sin x)^{\log 3} = 2\sqrt{3}^{-\log 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\sin x)^{\log 3} = 2\sqrt{3}^{-\log 2} \Rightarrow \sin x^{\log 3} = \sqrt{3}^{-\log 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log(\sin x)^{\log 3} = \log \sqrt{3}^{-\log 2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 3 \cdot \log \sin x = -\log 2 \cdot \log \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log 3 \cdot \log \sin x = -\log 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log 3 \Rightarrow$$

$$\log \sin x = \log \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \stackrel{x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{\Rightarrow} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{\pi}{4}$$