

ΘΕΜΑ 1

- A. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

B. Από σχολικό βιβλίο

ΘΕΜΑ 2

α) $P(-1) = Q(1) \Rightarrow \alpha + 3 - 3 = 1 + 3\alpha - 5 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2$

β) Για $\alpha = 2$ είναι $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3$, $Q(x) = x^2 + 1$

Κάνουμε την διαίρεση ;

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 + 3x^2 - 3 & x^2 + 1 \\ -2x^3 - 2x & 2x + 3 \\ \hline \end{array}$$

$$3x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{array}{r} -3x^2 \quad -3 \\ \hline \end{array}$$

$$-2x - 6$$

Άρα : $P(x) = (x^2 + 1)(2x + 3) - 2x - 6$

γ) $Q(x) = P(x) - (2x + 3)Q(x) + 2x =$
 $= (x^2 + 1)(2x + 3) - 2x - 6 - (2x + 3)(x^2 + 1) + 2x = -6$

Άρα το $Q(x)$ είναι σταθερό

ΘΕΜΑ 3

α) $f(-x) = \eta\mu^2(x) = (\eta\mu(-x))^2 = (-\eta\mu x)^2 = \eta\mu^2 x = f(x)$

Άρα η f είναι άρτια

β) Ξέρουμε ότι $\eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega}$

Άρα $f(x) = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega} = \frac{\frac{1}{\sigma\varphi^2\omega}}{1 + \frac{1}{\sigma\varphi^2\omega}} = \frac{1}{\sigma\varphi^2\omega + 1}$

γ) $f(\omega) = \frac{9}{25} \Rightarrow \eta\mu^2\omega = \frac{9}{25} \Rightarrow \eta\mu\omega = \pm \frac{3}{5}$

Όμως $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ άρα $\eta\mu\omega > 0$. Οπότε $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$

Για το συνημίτονο έχουμε :

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega=1-\eta\mu^2\omega=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=\pm\frac{4}{5}$$

$$\text{Ομως } \omega\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\text{ άρα } \sigma\upsilon\nu\omega>0. \quad \text{Οπότε } \sigma\upsilon\nu\omega=\frac{4}{5}$$

$$\text{Τώρα έχουμε : } \varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}-\omega\right)=\sigma\varphi\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Πρέπει $e^x+1>0$ που ισχύει πάντα.
Άρα η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\beta) \quad f(-x) &= \ln(e^{-x}+1) = \ln\left(\frac{1}{e^x}+1\right) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \\ &= \ln(e^x+1) - \ln e^x = f(x) - x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) \quad f(x)+f(-x) &< \ln(5e^x-1) - x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln(e^x+1) + \ln(e^{-x}+1) < \ln(5e^x-1) - \ln e^x \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln[(e^x+1)(e^{-x}+1)] < \ln\left(\frac{5e^x-1}{e^x}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (e^x+1)(e^{-x}+1) < \frac{5e^x-1}{e^x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1+e^x+e^{-x}+1) \cdot e^x < 5e^x-1 \Rightarrow \\ &2e^x+e^{2x}+1 < 5e^x-1 \Rightarrow e^{2x}-3e^x+2 < 0 \\ \text{Θέτουμε : } y &= e^x \text{ και έχουμε :} \\ y^2-3y+2 &< 0 \Rightarrow 1 < y < 2 \Rightarrow 1 < e^x < 2 \Rightarrow 0 < x < \ln 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta) \quad x \ln \frac{e}{2} + f(\ln 5) &= x + f(x \ln 2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(\ln e - \ln 2) + \ln(e^{\ln 5}+1) = x + \ln(e^{x \ln 2}+1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x - x \ln 2 + \ln 6 = x + \ln(e^{\ln 2^x}+1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x - \ln 2^x + \ln 6 = x + \ln(2^x+1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{6}{2^x}\right) = \ln(2^x+1) \Rightarrow \frac{6}{2^x} = 2^x+1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^{2x}+2^x-6=0 \\ \text{Θέτουμε : } y &= 2^x \text{ και έχουμε :} \\ y^2+y-6 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= 2 & \Rightarrow y &= -3 \\ \Rightarrow 2^x &= 2 & \text{ ή } & \Rightarrow 2^x = -3 \\ \Rightarrow x &= 1 & \text{ αδύνατη} & \end{aligned}$$