

ΘΕΜΑ 1

- A. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Λάθος

B. Διαιρούμε και τα δύο μέρη της ταυτότητας $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ με $\sigma\upsilon\nu^2\omega \neq 0$ και

$$\begin{aligned} \text{έχουμε: } \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \epsilon\varphi^2\omega + 1 &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2\omega} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2

- α) i. Όλα τα χαρτονομίσματα είναι 15, οπότε το άθροισμα των x και y είναι 15, δηλαδή σωστή είναι η εξίσωση 1. $y = 15 - x \Leftrightarrow y + x = 15$.
ii. Τα x χαρτονομίσματα των 20€ έχουν αξία $20x$ €. Αντίστοιχα τα y χαρτονομίσματα των 50€ έχουν αξία $50y$ €. Η συνολική αξία είναι 480€, οπότε σωστή είναι η εξίσωση 4. $20x + 50y = 480$.

β) Επιλύουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50y = 480 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ 20x + 50(15 - x) = 480 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 15 - x \\ -30x = 480 - 750 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} y = 15 - x \\ x = 9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 9 \end{cases} \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση $x = 9$ είναι τα χαρτονομίσματα των 20€ και $y = 6$ τα χαρτονομίσματα των 50€.

ΘΕΜΑ 3

α) Αφού το $P(x)$ είναι τρίτου βαθμού, ο συντελεστής του x^4 θα είναι 0.

$$\text{Άρα: } \ln \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = e^2$$

β) Έχει ρίζα το 1, άρα :

$$P(1) = 0 \Leftrightarrow 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 1 + 4\sigma\upsilon\nu\theta = 0 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu\theta = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \theta = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \text{ ή } \theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Άρα αφού από εκφώνηση } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ θα είναι } \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\gamma) P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 4\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 4 \cdot \frac{1}{2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$$

Ρίζα το 1.

$$\text{Με Horner παίρνουμε } P(x) = (x-1)(x^2 - x - 2)$$

$$\text{Άρα: } P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - 2) \geq 0$$

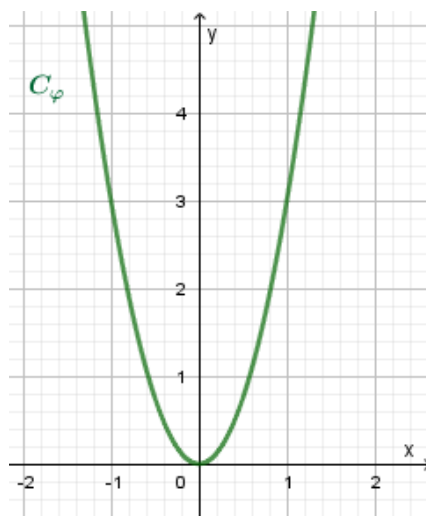
Τα πρόσημα του $P(x)$ φαίνονται στον διπλανό πίνακα

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$x-1$	-		-	0	+
x^2-x-2	+	0	-		+
P(x)	-	0	+	0	+

Άρα: $P(x) \geq 0$ για $x \in [-1, 1] \cup [2, +\infty)$

ΘΕΜΑ 4

- α) Η συνάρτηση φ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το $-x \in \mathbb{R}$. Επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\varphi(-x) = 3(-x)^2 = 3x^2 = \varphi(x)$.
Επομένως είναι άρτια συνάρτηση.
Η γραφική της παράσταση είναι η παρακάτω παραβολή.

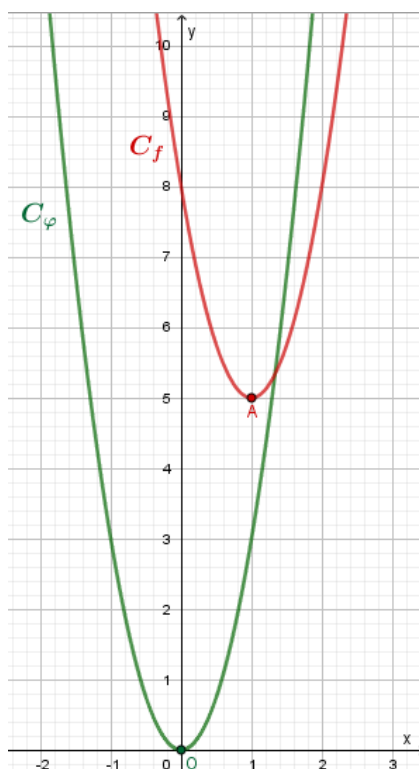


- β) Είναι:

$$f(x) = 3x^2 - 6x + 8 = 3\left(x^2 - 2x + \frac{8}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2x + 1 + \frac{5}{3}\right) = 3\left[(x-1)^2 + \frac{5}{3}\right]$$

Επομένως $f(x) = 3(x-1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της φ , μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 5 μονάδες προς τα πάνω. Έτσι, είναι:



- γ) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο $A(1,5)$. Ως εκ τούτου,
i. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ο άξονας συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f είναι η κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή της, δηλαδή η $x = 1$.
ii. Η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$, ολικό ελάχιστο το $f(1) = 5$.

iii. Είναι:

- Αν $\lambda > 5$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες
- Αν $\lambda = 5$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα
- Αν $\lambda < 5$ η εξίσωση είναι αδύνατη

