ΛΥΣΗ

α) Από την γνωστή ανισότητα $-1 \le ημx \le 1$ προκύπτει ότι $-2 \le 2ημx \le 2$, οπότε $-3 \le 2ημx - 1 \le 1$, δηλαδή $-3 \le f(x) \le 1$. Επιπλέον στο διάστημα $[0, 2π]$ η ισότητα $f(x) = -3$ ισχύει όταν $ημx = -1$ δηλαδή $x = \frac{3π}{2}$, ενώ η $f(x) = 1$ ισχύει όταν $ημx = 1$ δηλαδή $x = \frac{π}{2}$.

Επομένως η f παρουσιάζει:

- Ολικό ελάχιστο για $x = \frac{3π}{2}$, το $f\left(\frac{3π}{2}\right) = -3$.
- Ολικό μέγιστο για $x = \frac{π}{2}$, το $f\left(\frac{π}{2}\right) = 1$.

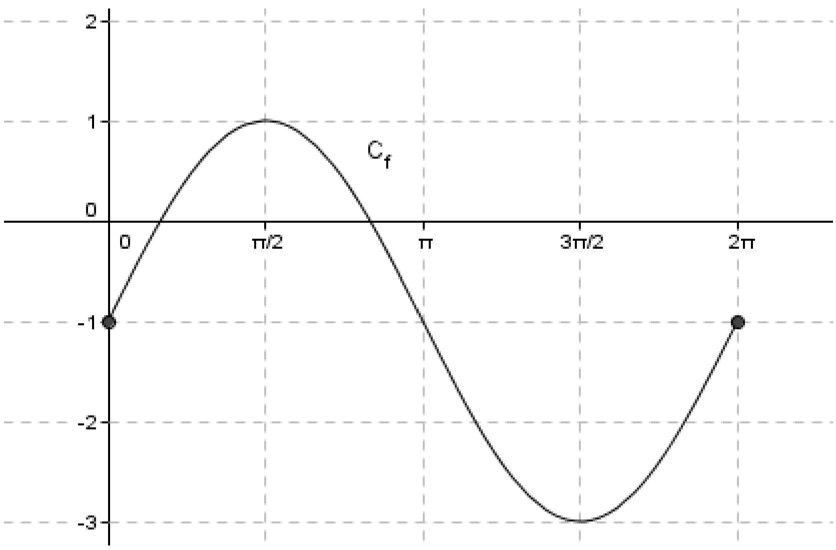
β) Με $x = 0$ έχουμε $f(0) = -1$, οπότε η C_f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -1)$.

Με $y = f(x) = 0$ έχουμε $2ημx - 1 = 0 \Leftrightarrow ημx = \frac{1}{2}$, οπότε για $x \in [0, 2π]$ βρίσκουμε $x = \frac{π}{6}$ ή $x = \frac{5π}{6}$. Επομένως τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$ είναι τα $B\left(\frac{π}{6}, 0\right)$, $Γ\left(\frac{5π}{6}, 0\right)$.

γ) Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών.

x	0	$\frac{π}{2}$	π	$\frac{3π}{2}$	2π
ημx	0	1	0	−1	0
f(x)	−1	1	−1	−3	−1

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα προκύπτει η επόμενη γραφική παράσταση C_f της f.



δ) Από την ισότητα $f(α) = f\left(\frac{π}{2} - α\right)$, έχουμε:

$$2ημα - 1 = 2ημ\left(\frac{π}{2} - α\right) - 1$$

απ’ όπου προκύπτει ότι $ημα = συνα$ και λόγω του περιορισμού $α \in \left(0, \frac{π}{2}\right)$ συμπεραίνουμε ότι $α = \frac{π}{4}$.