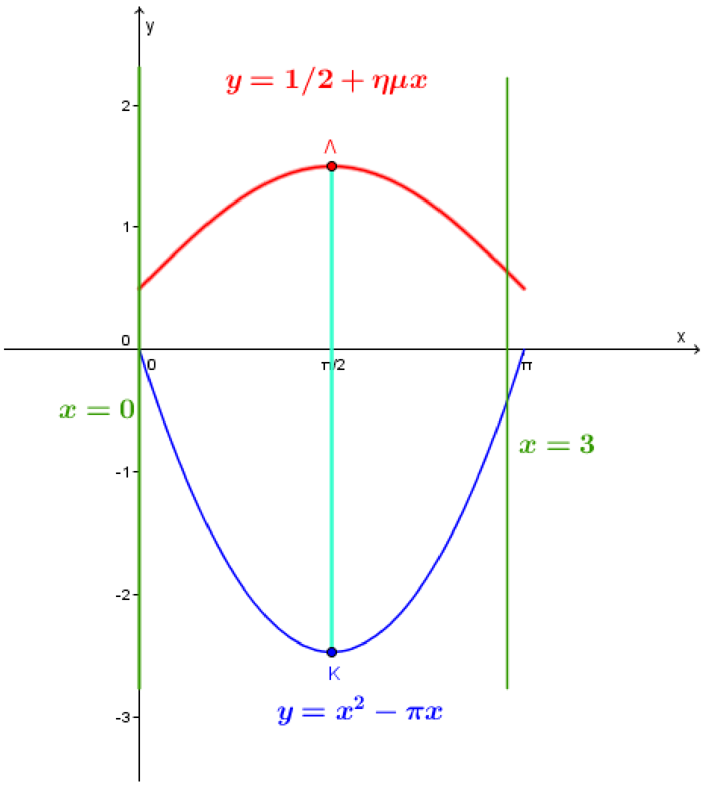
ΛΥΣΗ

α)

i. Η γραφική παράσταση της $y = g(x) = \frac{1}{2} + \eta\mu x$, με $x \in [0, \pi]$ προκύπτει από κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $\varphi(x) = \eta\mu x$, με $x \in [0, \pi]$ κατά $\frac{1}{2}$ μονάδες προς τα πάνω.

Επομένως, είναι:



ii. Γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{4}\right)$.

Από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $O(0,0)$ και $A(\pi, 0)$.

Στα σημεία αυτά η f παρουσιάζει την μέγιστη τιμή της, που είναι το 0.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ και παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $\Lambda\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Επιπλέον, είναι $g(0) = g(\pi) = \frac{1}{2}$.

Επομένως, η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και το $\frac{1}{2}$ είναι η ελάχιστη τιμή της g, η οποία παρουσιάζεται στις θέσεις

$x_1 = 0$ και $x_2 = \pi$.

β) Η ελάχιστη τιμή της παραβολής και η μέγιστη τιμή της τριγωνομετρικής συνάρτησης παρουσιάζονται στην ίδια θέση, για $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Επομένως, η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των δύο καμπυλών είναι:

$$|g_{max} - f_{min}| = \left|g\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left|\frac{3}{2} - \left(-\frac{\pi^2}{4}\right)\right| = \frac{3}{2} + \frac{\pi^2}{4}$$

και συνιστά το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda$.

γ) Επομένως, οι ελάχιστες διαστάσεις που πρέπει να έχει το ορθογώνιο πλακίδιο για να καλύψει πλήρως τη μεμβράνη είναι:

Μήκος ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $K\Lambda = \frac{3}{2} + \frac{\pi^2}{4}$.

Πλάτος ίσο με 3, που αποτελεί το πλάτος του διαστήματος $[0, 3]$, γιατί η περίμετρος της μεμβράνης καθορίζεται επίσης από τις εξισώσεις $x = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; x = 3$.