ΛΥΣΗ

α) $\mathrm{A}(0,2) \in C_f \Rightarrow f(0)=2 \Rightarrow \beta = 2$ και

$\mathrm{B}(e^2-1, 2\sqrt{2}+4) \in C_f \Rightarrow f(e^2-1) = 2\sqrt{2}+4 \Rightarrow$

$a\sqrt{\ln(e^2-1+1)} + \ln(e^2-1+1)+2 = 2\sqrt{2}+4 \Rightarrow a\sqrt{2}+4 = 2\sqrt{2}+4 \Rightarrow a=2$

Επομένως $f(x) = 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1)+2$ και

$g(x) = f(x)+3 = 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1)+5$.

β) Η $y=5$ τέμνει την C_f σε ένα σημείο $\Gamma(x,5)$ που από τη γραφική παράσταση φαίνεται

ότι $\frac{3}{2} < x < 2$. Αλγεβρικά:

$f(x)=5 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1)+2 = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{\ln(x+1)} + \ln(x+1) - 3 = 0 \quad (1)$.

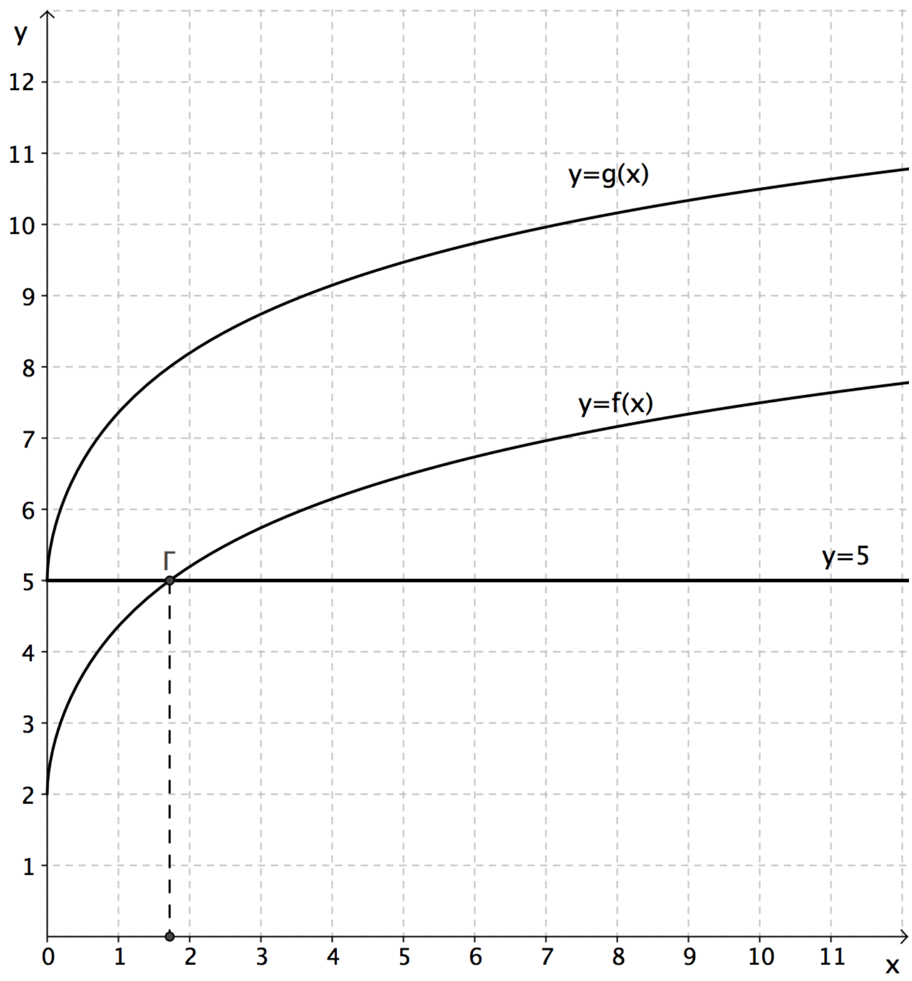
θέτω $\omega = \sqrt{\ln(x+1)}$ (2) και η επιλύουσα της (1) είναι: $\omega^2 + 2\omega - 3 = 0$,

με ρίζες $\omega_1 = 1$ και $\omega_2 = -3$.

Για $\omega = \omega_2$, η (2) είναι αδύνατη.

Για $\omega = \omega_1$, έχουμε

$(2) \Leftrightarrow \sqrt{\ln(x+1)} = 1 \Leftrightarrow \ln(x+1) = 1 \Leftrightarrow x+1 = 3 \Leftrightarrow x = e-1$.



γ) Παρατηρούμε από την C_g ότι για $x=12$, $g(12)<13$, δηλαδή το παιδί είναι υπέρβαρο.

Για να το δικαιολογήσουμε αυτό αλγεβρικά αρκεί να δείξουμε ότι

$g(12)-13<0$ ή $2\sqrt{\ln 13}+\ln 13-8<0$.

Γι' αυτό, θέτουμε $\omega=\sqrt{\ln 13}>0$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι το ω επαληθεύει την ανίσωση $x^2+2x-8<0 \quad (3)$.

Το τριώνυμο x^2+2x-8 έχει ρίζες $x_1=-4$ και $x_2=2$.

$(3)\Leftrightarrow (x+4)(x-2)<0 \Leftrightarrow x\in(-4,2)$.

Επομένως αρκεί $\omega<2$, ή $\ln 13<4$, ή $13<e^4$ που ισχύει.