ΛΥΣΗ

α) Το τριώνυμο $\omega^2+4\omega-12$ έχει ρίζες τις $\omega=2$ και $\omega=-6$. Για $\omega\neq 2$ και $\omega\neq -6$ έχουμε ισοδύναμα

$\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0 \Leftrightarrow \dfrac{(\omega-2)(\omega^2+2\omega+4)}{(\omega-2)(\omega+6)}>0 \Leftrightarrow (\omega^2+2\omega+4)(\omega+6)>0$ και επειδή το τριώνυμο $\omega^2+2\omega+4$ έχει αρνητική διακρίνουσα θα είναι για κάθε $\omega\in\mathbb{R}$ ομόσημο του συντελεστή του ω^2, δηλαδή θετικό, έχουμε τελικά ότι $\omega+6>0 \Leftrightarrow \omega>-6$.

Το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

β) Η συνάρτηση f ορίζεται για τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}>0$. Αν θέσουμε $e^x=\omega$ η τελευταία ανίσωση γίνεται $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για κάθε $\omega\in(-6,2)\cup(2,+\infty)$. Συνεπώς θα πρέπει $e^x\neq 2 \Leftrightarrow x\neq \ln 2$ και $e^x>-6$ που ισχύει. Τελικά το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

γ) Οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα xx' είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$ με $x\neq \ln 2$. Είναι

$$
\begin{aligned}
&f(x)=0 \Leftrightarrow\\
&\ln\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}=\ln 1 \Leftrightarrow\\
&\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}=1 \Leftrightarrow\\
&e^{3x}-8=e^{2x}+4e^x-12 \Leftrightarrow\\
&e^{3x}-e^{2x}-4e^x+4=0 \Leftrightarrow\\
&e^{2x}(e^x-1)-4(e^x-1)=0 \Leftrightarrow\\
&(e^x-1)(e^{2x}-4)=0 \Leftrightarrow\\
&(e^x-1)(e^x-2)(e^x+2)=0
\end{aligned}
$$

Συνεπώς θα πρέπει $e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ που είναι δεκτή ή

$e^x-2=0 \Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2$ που απορρίπτεται ή

$e^x+2=0 \Leftrightarrow e^x=-2$ που είναι αδύνατη.

Τελικά το μοναδικό σημείο τομής της γραφική παράσταση της f με τον άξονα xx' είναι το $(0,0)$.