ΛΥΣΗ

α) Από τον τύπο της συνάρτησης σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των λογαρίθμων, έχουμε:

$$f(2)+f(4)=\ln 2+3\ln 4=\ln 2+3\ln 2^2=\ln 2+6\ln 2=7\ln 2$$

και

$$\frac{1}{3}f(8)=\frac{1}{3}\cdot 7\ln 8=\frac{1}{3}\cdot 7\ln 2^3=\frac{3}{3}(7\ln 2)=7\ln 2$$

οπότε $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8)$.

β) Διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:

- Αν $0<x\leq 1$, τότε $x-1\leq 0$ και $\ln x\leq 0$, οπότε $(x-1)\ln x\geq 0 \Rightarrow f(x)\geq 0$.
- Αν $x>1$, τότε $x-1>0$ και $\ln x>0$, οπότε $(x-1)\ln x>0 \Rightarrow f(x)>0$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, ισχύει $f(x)\geq 0$, οπότε η γραφική παράσταση της f είναι από τον άξονα $x'x$ και πάνω.

γ) i.Οι τετμημένες των κοινών σημείων προσδιορίζονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=2x-2,\ x>0$. Είναι:

$$f(x)=2x-2 \Leftrightarrow (x-1)\ln x=2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)(\ln x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } \ln x-2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=e^2$$

Εύκολα πλέον βρίσκουμε ότι τα κοινά σημεία είναι τα $A(1,\ 0)$ και $B(e^2,\ 2e^2-2)$.

ii. Η C_f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για όλες τις θετικές τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)<2(x-1)$. Είναι:

$$f(x)<2(x-1) \Leftrightarrow (x-1)\ln x-2(x-1)<0 \Leftrightarrow (x-1)(\ln x-2)<0$$

Το πρόσημο κάθε παράγοντα και του γινομένου φαίνεται στον επόμενο πίνακα.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(\ln x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από την τελευταία γραμμή του πίνακα συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από την ευθεία (ε) για κάθε x με $x\in(1,\ e^2)$