ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται για τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $e^x - 2 > 0$

Δηλαδή: $e^x > 2 \overset{\ln x \nearrow}{\Leftrightarrow} \ln e^x > \ln 2 \Leftrightarrow x > \ln 2.$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι $\mathrm{A} = (\ln 2, +\infty)$.

β) Έχουμε

$$\begin{aligned}
& f(x) + x = 3\ln 2 \Leftrightarrow \\
& \ln\left(e^x - 2\right) + x = \ln 2^3 \Leftrightarrow \\
& \ln\left(e^x - 2\right) + \ln e^x = \ln 8 \Leftrightarrow \\
& \ln\left[\left(e^x - 2\right)\cdot e^x\right] = \ln 8 \Leftrightarrow \\
& \left(e^x\right)^2 - 2e^x = 8 \overset{e^x = y}{\Leftrightarrow} \\
& y^2 - 2y - 8 = 0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 36 > 0$ και ρίζες $y = 4$, $y = -2$. Άρα $e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$ (η εξίσωση $e^x = -2$ είναι αδύνατη, διότι $e^x > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x). Η λύση $x = \ln 4$ είναι δεκτή, διότι $\ln 4 > \ln 2$.

Τελικά η εξίσωση $f(x) + x = 3\ln 2$ έχει λύση $x = \ln 4$.

γ) Έχουμε

$$\begin{aligned}
& f(x) + x \geq 3\ln 2 \Leftrightarrow \\
& \ln\left(e^x - 2\right) + x \geq \ln 2^3 \Leftrightarrow \\
& \ln\left(e^x - 2\right) + \ln e^x \geq \ln 8 \Leftrightarrow \\
& \ln\left[\left(e^x - 2\right)\cdot e^x\right] \geq \ln 8 \Leftrightarrow \\
& \left(e^x\right)^2 - 2e^x \geq 8 \overset{e^x = y}{\Leftrightarrow} \\
& y^2 - 2y - 8 \geq 0 \qquad (1).
\end{aligned}$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $y^2 - 2y - 8$ έχει ρίζες $y = 4$ και $y = -2$. Άρα η ανίσωση (1) αληθεύει για $y \leq -2$ ή $y \geq 4$, δηλαδή $e^x \leq -2$ (που είναι αδύνατη) ή $e^x \geq 4 \Leftrightarrow \ln e^x \geq \ln 4 \Leftrightarrow x \geq \ln 4$. Πρέπει και $x > \ln 2$, οπότε τελικά η ανίσωση $f(x) + x \geq 3\ln 2$ αληθεύει για $x \geq \ln 4$.