ΛΥΣΗ

α) Πρέπει

$$\frac{4^x-1}{2^x+5}>0 \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}$$
$$4^x-1>0 \Leftrightarrow$$
$$4^x>1 \Leftrightarrow$$
$$4^x>4^0 \Leftrightarrow$$
$$x>0.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathrm{A}=(0,+\infty)$.

β) Γνωρίζουμε ότι για $\alpha>0, \alpha\neq 1$ και $x_1, x_2>0$ ισχύει η ισοδυναμία: $\log_\alpha x_1=\log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1=x_2$. Οπότε έχουμε:

$$f(x)=\log 3-\log 7 \Leftrightarrow$$
$$\log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$7\cdot 4^x-7=3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow$$
$$7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22=0 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow}$$
$$7\cdot y^2-3\cdot y-22=0.$$

Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=(-3)^2-4\cdot 7\cdot(-22)=625>0$ και ρίζες $y_1=\frac{3+25}{14}=\frac{28}{14}=2$, $y_2=\frac{3-25}{14}=\frac{-22}{14}=-\frac{11}{7}$.

Οπότε $2^x=2 \Leftrightarrow x=1$, που είναι δεκτή διότι $x>0$ (η εξίσωση $2^x=-\frac{11}{7}$ είναι αδύνατη).

γ) Έχουμε

$$f(x)>\log 3-\log 7 \Leftrightarrow$$
$$\log\frac{4^x-1}{2^x+5}>\log\frac{3}{7} \Leftrightarrow$$
$$\frac{4^x-1}{2^x+5}>\frac{3}{7} \overset{2^x+5>0}{\Leftrightarrow}$$
$$7\cdot 4^x-7>3\cdot 2^x+15 \Leftrightarrow$$
$$7\cdot\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x-22>0 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow}$$
$$7\cdot y^2-3\cdot y-22>0 \qquad (1)$$

Από το β) ερώτημα γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο $7\cdot y^2-3\cdot y-22$ έχει ρίζες $y=2$ και $y=-\frac{11}{7}$. Οπότε η ανίσωση (1) αληθεύει για $y<-\frac{11}{7}$ ή $y>2$, δηλαδή $2^x<-\frac{11}{7}$ (αδύνατη διότι $2^x>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x) ή $2^x>2\Leftrightarrow x>1$.

Τελικά η ανίσωση αληθεύει για $x>1$.