ΛΥΣΗ

α) Το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x-3$ αν και μόνο αν $P(3) = 0$.

Επίσης, αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x+1)$ είναι $\upsilon = -16$, τότε $P(-1) = -16$.

Είναι: $\begin{cases} P(3) = 0 \\ P(-1) = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\alpha + \beta = 48 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\alpha = 40 \\ \alpha + \beta = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 3 \end{cases}$

Επομένως, το πολυώνυμο γίνεται: $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$.

β) Η εξίσωση: $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ (1)

Εφαρμόζοντας το σχήμα Horner για $\rho = 3$, είναι:

1	-5	7	-3	$\rho = 3$
	3	-6	3	
1	-2	1	0	

Άρα $P(x) = (x-3)(x^2 - 2x + 1) = (x-3)(x-1)^2$.

Η (1) ισοδύναμα γράφεται: $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ή $x = 1$.

γ) Είναι

$$P(x) < 0 \Leftrightarrow (x-3)(x-1)^2 < 0 \xLeftrightarrow{(x-1)^2 \geq 0} x - 3 < 0 \text{ και } x \neq 1 \Leftrightarrow$$
$$x \in (-\infty, 1) \cup (1,3).$$

δ) Έστω $P(ln\kappa) < 0$ (2).

Καταρχάς πρέπει $\kappa > 0$.

Θέτοντας $ln\kappa = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$ η ανίσωση (2) γίνεται ισοδύναμα

$$P(\lambda) < 0 \overset{\gamma)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda < 3 \\ \lambda \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ln\kappa < 3 \\ ln\kappa \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ln\kappa < lne^3 \\ ln\kappa \neq lne \end{cases} \xLeftrightarrow{lnx \uparrow} \begin{cases} \kappa < e^3 \\ \kappa \neq e \end{cases}.$$

Επομένως, είναι: $\kappa \in (0, e) \cup (e, e^3)$.