ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση ορίζεται μόνο όταν $e^x - 1 > 0$. Είναι:

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^o \Leftrightarrow x > 0.$$

Άρα $A = (0, +\infty)$.

Η τετμημένη του κοινού σημείου της γραφικής παράστασης C_f της f με τον $x'x$ είναι η λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$. Είναι:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = \ln 1 \Leftrightarrow e^x - 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Επομένως η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(\ln 2, 0)$.

β) Με $x > 0$ έχουμε:

$$f(x) = x - 1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = \ln e^{x-1} \Leftrightarrow e^x - 1 = e^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow e^{x+1} - e = e^x \Leftrightarrow (e-1)e^x = e \Leftrightarrow e^x = \frac{e}{e-1} \Leftrightarrow x = \ln\frac{e}{e-1} \Leftrightarrow x = 1 - \ln(e-1)$$

που περιέχεται στο $A = (0, +\infty)$, αφού

$$e > e - 1 \Rightarrow \ln e > \ln(e-1) \Rightarrow 1 - \ln(e-1) > 0$$

γ) Έστω $\alpha > 0$. Αν υποθέσουμε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$, τότε η εξίσωση $f(x) = x + \alpha$ έχει λύση στο A. Είναι:

$$f(x) = x + \alpha \Leftrightarrow \ln(e^x - 1) = \ln e^{x+\alpha} \Leftrightarrow e^x - 1 = e^{x+\alpha} \Leftrightarrow e^{x+\alpha} - e^x = -1$$

που είναι άτοπο, αφού με $\alpha > 0$ ισχύει

$$x + \alpha > x \Rightarrow e^{x+\alpha} > e^x \Rightarrow e^{x+\alpha} - e^x > 0.$$

Επομένως, αν $\alpha > 0$ τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.