ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ με $\omega\neq 3$ είναι ισοδύναμη με την $\left(\omega^2-1\right)\left(\omega-3\right)>0$.

Το πρόσημο του $\left(\omega^2-1\right)\left(\omega-3\right)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

ω	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$\omega-3$	-		-		-	0	+
ω^2-1	+	0	-	0	+		+
$(\omega-3)(\omega^2-1)$	-	0	+	0	-	0	+

Συνεπώς η ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ αληθεύει για κάθε $\omega\in\left(-1,1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$.

β) Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$.Αν θέσουμε $e^x=\omega$ η ανίσωση $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}>0$ γίνεται $\frac{\omega^2-1}{\omega-3}>0$ που όπως δείξαμε στο α) αληθεύει για $\omega\in\left(-1,1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$.

Συνεπώς θα πρέπει $-1<\omega<1\Leftrightarrow -1<e^x<1\Leftrightarrow x<0$ ή $\omega>3\Leftrightarrow e^x>3\Leftrightarrow x>\ln 3$

Τελικά η παράσταση A ορίζεται για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(\ln 3,+\infty\right)$.

γ) Η εξίσωση $\mathrm{A}=-\ln 3$ ορίζεται για κάθε $x\in\left(-\infty,0\right)\cup\left(\ln 3,+\infty\right)$ και γίνεται ισοδύναμα

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)=\ln 3^{-1}\Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$3e^{2x}-3=e^x-3\Leftrightarrow$$

$$3e^{2x}-e^x=0\Leftrightarrow$$

$$e^x\left(3e^x-1\right)=0\overset{e^x\neq 0}{\Leftrightarrow}$$

$$3e^x-1=0\Leftrightarrow$$

$$e^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow$$

$$x=\ln\frac{1}{3}$$

και επειδή $\frac{1}{3}<1\Leftrightarrow \ln\frac{1}{3}<0$ η λύση $x=\ln\frac{1}{3}$ είναι δεκτή.