ΛΥΣΗ

α) Καθώς υπάρχουν λογάριθμοι μόνο θετικών αριθμών, απαιτούμε $10^x - 1 > 0$, άρα $10^x > 1 \Leftrightarrow 10^x > 10^0 \Leftrightarrow x > 0$, αφού η συνάρτηση $g(x) = 10^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) Πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow log(10^x - 1) > 0 \Leftrightarrow log(10^x - 1) > log1$ και καθώς η συνάρτηση $h(x) = logx$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ παίρνουμε $10^x - 1 > 1 \Leftrightarrow 10^x > 2$ σχέση που γράφεται $10^x > 10^{log2}$. Ώστε $x > log2$, δηλαδή $x \in (log2, +\infty)$.

γ) Έχουμε $f(x) + x = log(10^x - 1) + log10^x = log[10^x(10^x - 1)] =$
$log(10^x \cdot 10^x - 10^x) = log(10^{2x} - 10^x)$.

δ) Πρέπει να λύσουμε την εξίσωση $f(x) = -x \Leftrightarrow f(x) + x = 0 \Leftrightarrow log(10^{2x} - 10^x) = 0$ άρα $10^{2x} - 10^x = 1 \Leftrightarrow (10^x)^2 - 10^x - 1 = 0$. Θέτοντας $10^x = y > 0$, παίρνουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση $y^2 - y - 1 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 5$, οπότε $y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Έτσι $y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, αφού $y > 0$.

Τελικά $10^x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \Leftrightarrow x = log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $\left(log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), -log\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\right)$.