ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2-2x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-x-2\right)=0$. Οπότε $x=0$ ή $x^2-x-2=0$ που έχει $\Delta=9$ και ρίζες $x=-1$ και $x=2$. Τελικά ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$ είναι οι $x=0$, $x=-1$ και $x=2$.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση, πρέπει $x>0$. Θέτουμε $\ln x=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $P(\omega)=0$.

Από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες $\omega=0$, $\omega=-1$, $\omega=2$. Οπότε προκύπτουν τρείς εξισώσεις:

i) $\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln 1 \Leftrightarrow x=1$ δεκτή.

ii) $\ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^{-1} \Leftrightarrow x=e^{-1}$ δεκτή.

iii) $\ln x=2 \Leftrightarrow \ln x=\ln e^2 \Leftrightarrow x=e^2$ δεκτή.

γ) Η ανίσωση $x^3-x^2-2x>0 \Leftrightarrow P(x)>0 \Leftrightarrow x\left(x^2-x-2\right)>0$ αληθεύει για $x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Οπότε για την ανίσωση $(\ln x)^3-(\ln x)^2-2(\ln x)>0 \Leftrightarrow P(\ln x)>0$, προκύπτει ότι $\ln x\in(-1,0)\cup(2,+\infty)$. Λύνουμε τις δύο ανισώσεις:

i) $-1<\ln x<0 \Leftrightarrow \ln e^{-1}<\ln x<\ln 1 \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} \frac{1}{e}<x<1$

ii) $2<\ln x \Leftrightarrow \ln e^2<\ln x \overset{\nearrow}{\Leftrightarrow} e^2<x$.

Τελικά $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)\cup\left(e^2,+\infty\right)$.