ΛΥΣΗ

α) Είναι:

$f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1) \Leftrightarrow e^{\kappa} - 1 \geq 1 - e^{-\kappa} \Leftrightarrow e^{\kappa} - 1 \geq 1 - \frac{1}{e^{\kappa}} \Leftrightarrow$

$e^{2\kappa} - e^{\kappa} \geq e^{\kappa} - 1 \Leftrightarrow e^{2\kappa} - 2e^{\kappa} + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (e^{\kappa} - 1)^2 \geq 0$, η οποία ισχύει πάντα.

Η ισότητα ισχύει, όταν $e^{\kappa} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{\kappa} = 1 \Leftrightarrow \kappa = 0$.

β) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

<u>1^{ος} τρόπος</u>:

Αφού $\kappa > 0 \overset{e^x\uparrow}{\Longrightarrow} e^{\kappa} > 1$ και η συνάρτηση γράφεται $f(x) = e^{\kappa x} = (e^{\kappa})^x$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

<u>2^{ος} τρόπος</u>:

Έστω $\kappa > 0$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Τότε $\kappa \cdot x_1 < \kappa \cdot x_2 \overset{e^x\uparrow}{\Longrightarrow} e^{\kappa \cdot x_1} < e^{\kappa \cdot x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ)

i. Είναι:

$$e^{2x} > 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x > 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 2) > 0 \overset{e^x > 0}{\Longleftrightarrow} e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x > 2 \Leftrightarrow e^x > e^{ln2} \Leftrightarrow x > ln2.$$

ii. Το σημείο τομής των δύο καμπυλών προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης

$$e^{2x} = 2e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(e^x - 2) = 0 \overset{e^x \neq 0}{\Longleftrightarrow} e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = e^{ln2} \Leftrightarrow x = ln2,$$

και $\varphi(ln2) = 2e^{ln2} = 2 \cdot 2 = 4$

Επομένως, το σημείο τομής των δύο καμπυλών είναι το $A(ln2, 4)$.

Από την ισοδυναμία $e^{2x} > 2e^x \Leftrightarrow x > ln2$, προκύπτει ότι η καμπύλη C_1 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(x) = e^{2x}$, ενώ η C_2 απεικονίζει γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2e^x$.