ΛΥΣΗ

α)

i. Για $x\in(-\infty,0)$ είναι $-x>0$ και $\sqrt{x^2+1}>0$, οπότε $\sqrt{x^2+1}-x>0$.

ii. Για να βρούμε τα ζητούμενα διαστήματα αρκεί να επιλύσουμε την $f(x)>0$ με $x\in\mathbb{R}$.

- Από το ερώτημα (i) γνωρίζουμε ότι για κάθε $x\in(-\infty,0)$ ισχύει $\sqrt{x^2+1}-x>0 \Leftrightarrow f(x)>0$.
- Ακόμη, για κάθε $x\in[0,+\infty)$ είναι:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+1}-x>0 &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1}>x\\ &\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2>x^2\\ &\Leftrightarrow x^2+1>x^2\\ &\Leftrightarrow 1>0, \text{ που ισχύει.}\end{aligned}$$

Τελικά, η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**<u>β τρόπος</u>**

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>|x|$, όμως $|x|\geq x$, άρα $\sqrt{x^2+1}>|x|\geq x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}>x\Rightarrow\sqrt{x^2+1}-x>0\Rightarrow f(x)>0$.

Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$\begin{aligned}g(-x)+g(x)&=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)\right)\\ &=\ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)\\ &=\ln\left(\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2\right)=\\ &=\ln\left(x^2+1-x^2\right)\\ &=\ln1=0\end{aligned}$$

ii. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι:

- $-x \in \mathbb{R}$ και
- από το προηγούμενο υποερώτημα ισχύει ότι $g(-x)+g(x)=0 \Leftrightarrow g(-x)=-g(x)$.

Άρα η συνάρτηση $g$ είναι περιττή και έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $\mathrm{O}$.