ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $\begin{cases} y = f(x), & x \geq 1 \\ y = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x-1}, & x \geq 1 \\ y = \frac{x+1}{3} \end{cases}$.

Επομένως προκύπτει η εξίσωση $\sqrt{x-1} = \frac{x+1}{3}$, $x \geq 1$, η οποία ισοδύναμα γίνεται:

$$3\sqrt{x-1} = x+1 \overset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow} 9(x-1) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

Η διακρίνουσα είναι $\Delta = 49 - 40 = 9 > 0$ και οι ρίζες της εξίσωσης

$x_1, x_2 = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 5.$

Για $x = 2$, είναι $y = \frac{2+1}{3} = 1.$

Για $x = 5$, είναι $y = \frac{5+1}{3} = 2.$

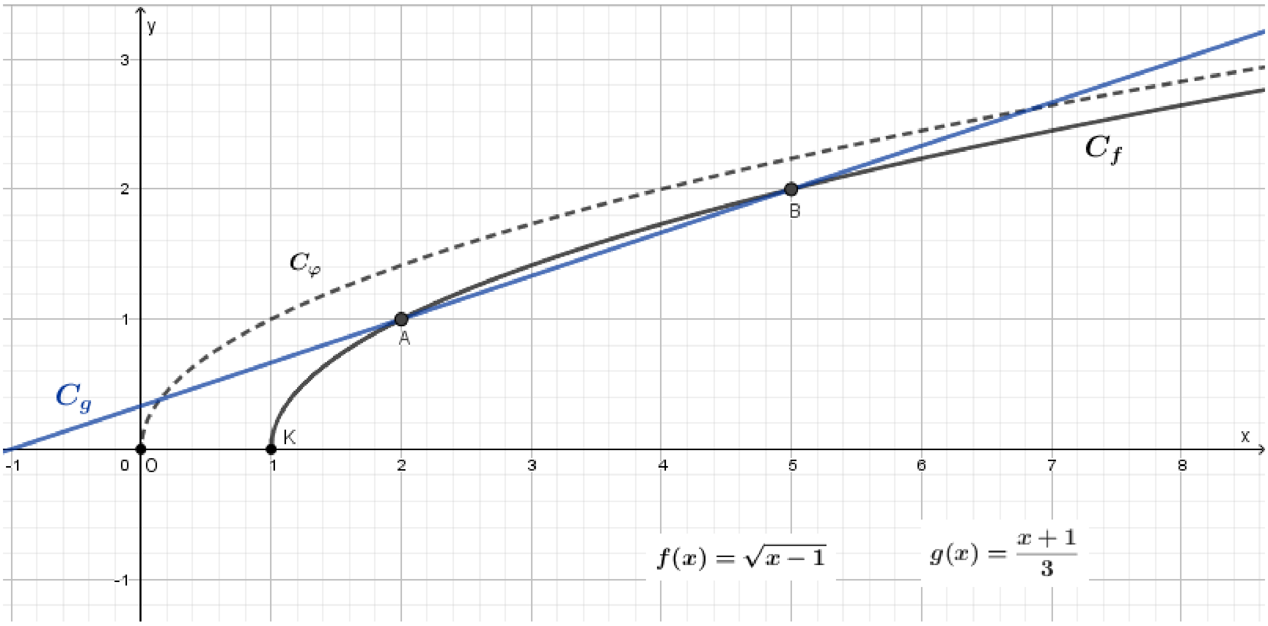
Επομένως, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, είναι το $A(2,1)$ και το $B(5,2)$.

β)

i. Επειδή $f(x) = \varphi(x-1)$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ κατά μία μονάδα προς τα δεξιά. Έτσι, το σημείο $O(0,0)$ θα μεταφερθεί στο σημείο $K(1,0)$.

ii. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι ευθεία, οπότε για τον σχεδιασμό της χρειάζονται δύο σημεία της. Επιλέγουμε τα σημεία $A(2,1)$ και $B(5,2)$, τα οποία είναι και τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων, στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, είναι οι ακόλουθες:



γ) Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g όταν $x \epsilon (2, 5)$.

Εναλλακτική – αλγεβρική – προσέγγιση:

Επιλύουμε την ανίσωση $\sqrt{x-1} > \frac{x+1}{3}$, με $x \geq 1$.

Ακολουθώντας τα βήματα επίλυσης της αντίστοιχης εξίσωσης που έγιναν στο α) ερώτημα, έχουμε:

$$3\sqrt{x-1} > x+1 \overset{x\geq 1}{\Longleftrightarrow} 9(x-1) > x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 < 0$$

Αφού ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός και $x_1 = 2,\ x_2 = 5$, έχουμε ότι το τριώνυμο είναι αρνητικό όταν το x βρίσκεται μεταξύ των ριζών του. Επομένως $x \epsilon (2, 5)$.

δ) Είναι: $\sqrt{ln10 - 1} > \frac{1+ln10}{3} \Leftrightarrow f(ln10) > g(ln10)$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $2 < ln10 < 5 \overset{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} e^2 < e^{ln10} < e^5 \Leftrightarrow e^2 < 10 < e^5$.

Πραγματικά είναι: $e < 3 \Leftrightarrow e^2 < 3^2 < 10$ και $e > 2 \Leftrightarrow e^5 > 2^5 > 10$.