ΛΥΣΗ

α) Ισχύει:

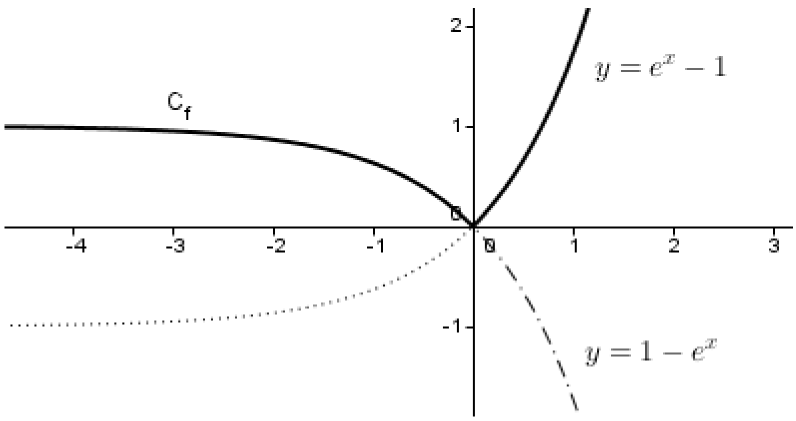
$$e^x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 0 .$$

Έτσι, ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} e^x - 1, \ x \ge 0 \\ 1 - e^x, \ x < 0 \end{cases}$$

Αν μεταφέρουμε μια μονάδα προς τα κάτω τη γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$, προκύπτει η γραφική παράσταση της $g_1(x) = e^x - 1$ , ενώ αν μεταφέρουμε μια μονάδα προς τα πάνω την γραφική παράσταση της $h(x) = -e^x$, προκύπτει η γραφική παράσταση της $h_1(x) = 1 - e^x$.

Σύμφωνα με τον απλοποιημένο τύπο, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της γραφικής παράστασης της $g_1$ που είναι από τον άξονα $y'y$ και δεξιά και το τμήμα της $h_1$ που είναι από τον άξονα $y'y$ και αριστερά, οπότε προκύπτει το σχήμα της εκφώνησης.




β) Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι αυτή είναι:

- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και
- παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$

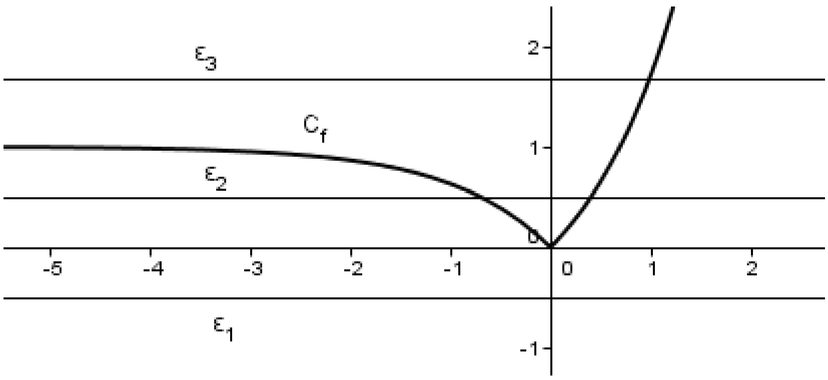
γ) Είναι:

$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |e^x - 1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^x - 1 = \frac{1}{2} \text{ ή } e^x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{3}{2} \text{ ή } e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\frac{3}{2} \text{ ή } x = \ln\frac{1}{2}$$

δ) Είναι γνωστό ότι το σύνολο τιμών της $y = e^x$ είναι το $(0, +\infty)$. Έτσι, για $x \le 0$ έχουμε $0 < e^x \le 1$, οπότε $-1 < e^x - 1 \le 0$, άρα $0 \le f(x) < 1$.

Σχετικά με το πλήθος των κοινών σημείων, με τη βοήθεια του σχήματος, διακρίνουμε τις παρακάτω δυνατές περιπτώσεις:




- Αν $\alpha < 0$, (ευθεία $\varepsilon_1$) τότε η $C_f$ και η ευθεία $y = \alpha$ δεν έχουν κοινό σημείο.
- Αν $\alpha = 0$, τότε η $C_f$ και η ευθεία $y = 0$ (άξονας $x'x$) έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
- Αν $0 < \alpha < 1$, (ευθεία $\varepsilon_2$) τότε η $C_f$ και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- Αν $\alpha \ge 1$, (ευθεία $\varepsilon_3$) τότε η $C_f$ και η ευθεία $y = \alpha$ έχουν ένα κοινό σημείο.