ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε:

$$\begin{aligned} x\left(e^x-1\right)=0 &\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^x-1=0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^x=1 \\ &\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } e^x=e^0 \\ &\Leftrightarrow x=0 \end{aligned}$$

ii. Από το ερώτημα (i) γνωρίζουμε ότι κάθε παράγοντας του γινομένου $x\left(e^x-1\right)$ έχει ρίζα το 0. Ακόμη είναι $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow x>0$ και $e^x-1<0 \Leftrightarrow x<0$.

Ο προσδιορισμός του προσήμου του γινομένου $x\left(e^x-1\right)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
x	$-$	$+$
e^x-1	$-$	$+$
$x\left(e^x-1\right)$	$+$	$+$

Ώστε το γινόμενο $x\left(e^x-1\right)$ είναι θετικό για κάθε $x\neq 0$.

β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνες τις τιμές του x, για τις οποίες ισχύει $x\left(e^x-1\right)\geq 0$. Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι $x\left(e^x-1\right)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

ii. Είναι

$$f(0)=\sqrt{0\cdot\left(e^0-1\right)}=0$$

$$f(\ln 2)=\sqrt{\ln 2\cdot\left(e^{\ln 2}-1\right)}=\sqrt{\ln 2\cdot(2-1)}=\sqrt{\ln 2}$$

$$f(-\ln 2)=\sqrt{-\ln 2\cdot\left(e^{-\ln 2}-1\right)}=\sqrt{-\ln 2\cdot\left(e^{\ln\frac{1}{2}}-1\right)}=\sqrt{-\ln 2\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)}=\sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$$

iii. Επειδή ισχύει $-\ln 2<0$ και $f(-\ln 2)>f(0)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή ισχύει $0<\ln 2$ και $f(0)<f(\ln 2)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά, ο ισχυρισμός « η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x(e^x-1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της» είναι ψευδής.