ΛΥΣΗ

α) Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$, θα ισχύει ότι $P(1)=0$.

Είναι $P(1)=0 \Leftrightarrow 2-9+\alpha-2-6=0 \Leftrightarrow \alpha=15$.

β) Για $\alpha=15$ έχουμε $P(x)=2x^3-9x^2+13x-6$.

i. Η διαίρεση $P(x):\left(x^2-3x+2\right)$ φαίνεται παρακάτω.

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3-9x^2+13x-6 & x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
-2x^3+6x^2-4x & 2x-3 \\ \cline{1-1}
-3x^2+9x-6 & \\
3x^2-9x+6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$.

ii. Αξιοποιώντας την παραπάνω ταυτότητα διαίρεσης έχουμε :

$P(x)<0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)(2x-3)<0$

Το πρόσημο του πολυωνύμου $P(x)=\left(x^2-3x+2\right)(2x-3)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
x^2-3x+2		+	0	-		-	0	+	
$2x-3$		-		-	0	+		+	
$P(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Συνεπώς η ανίσωση $P(x)<0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+2\right)(2x-3)<0$ αληθεύει για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$.

iii. Είναι $\ln 2<\ln e \Leftrightarrow \ln 2<1$ οπότε αφού δείξαμε παραπάνω ότι $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$, είναι $P(\ln 2)<0$.