ΛΥΣΗ

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία Α$(1,3)$ και Β$(2,13)$, οπότε:

$$\begin{cases} f(1)=3 \\ f(2)=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\cdot 2^1+\beta=3 \\ \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha+\beta=3 \\ 4\alpha+\beta=13 \end{cases} \overset{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2\alpha=10 \\ 2\alpha+\beta=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=5 \\ \beta=-7. \end{cases}$$

β) Για $\alpha=5$ και $\beta=-7$ η συνάρτηση γίνεται $f(x)=5\cdot 2^x-7$ και για $x=0$ έχουμε $f(0)=5\cdot 2^0-7=5\cdot 1-7=-2$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-2)$.

γ) Παρατηρούμε ότι για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$,έχουμε

$$\begin{aligned} &2^{x_1}<2^{x_2} \Leftrightarrow \\ &5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2} \Leftrightarrow \\ &5\cdot 2^{x_1}-7<5\cdot 2^{x_2}-7 \Leftrightarrow \\ &f(x_1)<f(x_2). \end{aligned}$$

Άρα η $f(x)=5\cdot 2^x-7$ είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση.

δ) Έχουμε

$$\begin{aligned} &f(x)>4^x-3 \Leftrightarrow \\ &5\cdot 2^x-7>\left(2^x\right)^2-3 \overset{2^x=y}{\Leftrightarrow} \\ &y^2-5y+4<0 \qquad (1). \end{aligned}$$

Το τριώνυμο y^2-5y+4 έχει ρίζες $y_1=4$, $y_2=1$ (διότι $1+4=5=S$ και $1\cdot 4=4=P$). Η ανίσωση (1) αληθεύει για $1<y<4$, δηλαδή:

$$1<2^x<4 \Leftrightarrow 2^0<2^x<2^2 \Leftrightarrow 0<x<2.$$

Τελικά η ανίσωση $f(x)>4^x-3$ αληθεύει για $x\in(0,2)$.