ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f είναι άρτια, διότι:

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το $-x \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f(x) \geq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα έχουμε ότι

$$e^{|x|} \geq e^0 \overset{e^x \uparrow}{\Longleftrightarrow} |x| \geq 0,$$

η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Επομένως, η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή της είναι η $f(0) = 1$.

γ) Αν $x \geq 0$, τότε $|x| = x$ και $f(x) = e^x$.

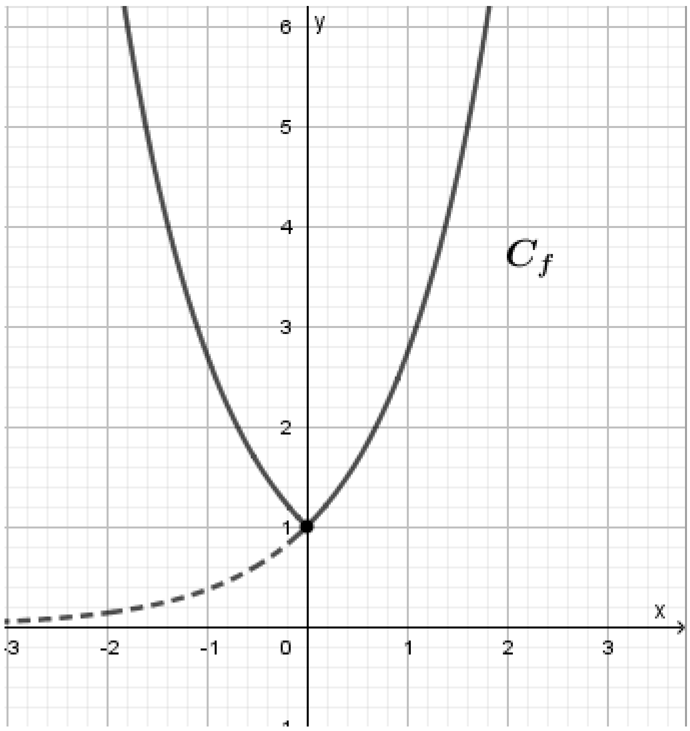
Αν $x < 0$, τότε $|x| = -x$ και $f(x) = e^{-x}$.

Έτσι προκύπτει η δίκλαδη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^x\ , & x \geq 0 \end{cases}$, η οποία σύμφωνα με το ερώτημα α) είναι άρτια. Οπότε είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

Επομένως, αποτελείται από την γραφική παράσταση της $h(x) = e^x,\ x \geq 0$ και την συμμετρική της h ως προς τον άξονα $y'y$ για $x < 0$.

Επιπλέον, από το ερώτημα β) γνωρίζουμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 0$ και η ελάχιστη τιμή της είναι η $f(0) = 1$.

Επομένως η γραφική παράσταση της f δίνεται από το παρακάτω σχήμα:



δ) Έχουμε αποδείξει ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Για την συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ γνωρίζουμε ότι έχει μέγιστη τιμή το 1 στη θέση $x = 0$. Επομένως, είναι $g(x) \leq 1 \leq f(x)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Ως εκ τούτου, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A(0,1)$.

Τα παραπάνω φαίνονται στο επόμενο σχήμα: