ΛΥΣΗ

α) Η ανίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq -1$.

Είναι $\dfrac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

Τελικά $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ αν και μόνο αν $\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0$.

   Από το ερώτημα (α) έχουμε ότι: $\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

ii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα αν και μόνο αν $0 < \dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1$.

   Από το ερώτημα (i) έχουμε ότι: $\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

   Ακόμη είναι:

   $$\frac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2}{\alpha+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2-1(\alpha+1)}{\alpha+1} < 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{\alpha+1} < 0 \Leftrightarrow \alpha+1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1.$$

   Οι παραπάνω ανισώσεις συναληθεύουν για $\alpha \in (2, +\infty)$. Επομένως για $\alpha \in (2, +\infty)$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

iii. Ισχύει $\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} > 0$.

   - Αν $\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} > 1$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
   - Αν $0 < \dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} < 1$ τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.
   - Αν ισχύει $\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} = 1$, η f είναι σταθερή αφού $f(x) = 1^x = 1$.

     Τότε $\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1} = 1 \Rightarrow \alpha - 2 = \alpha + 1 \Rightarrow 0\alpha = 3$, αδύνατη.

   Τελικά, δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.