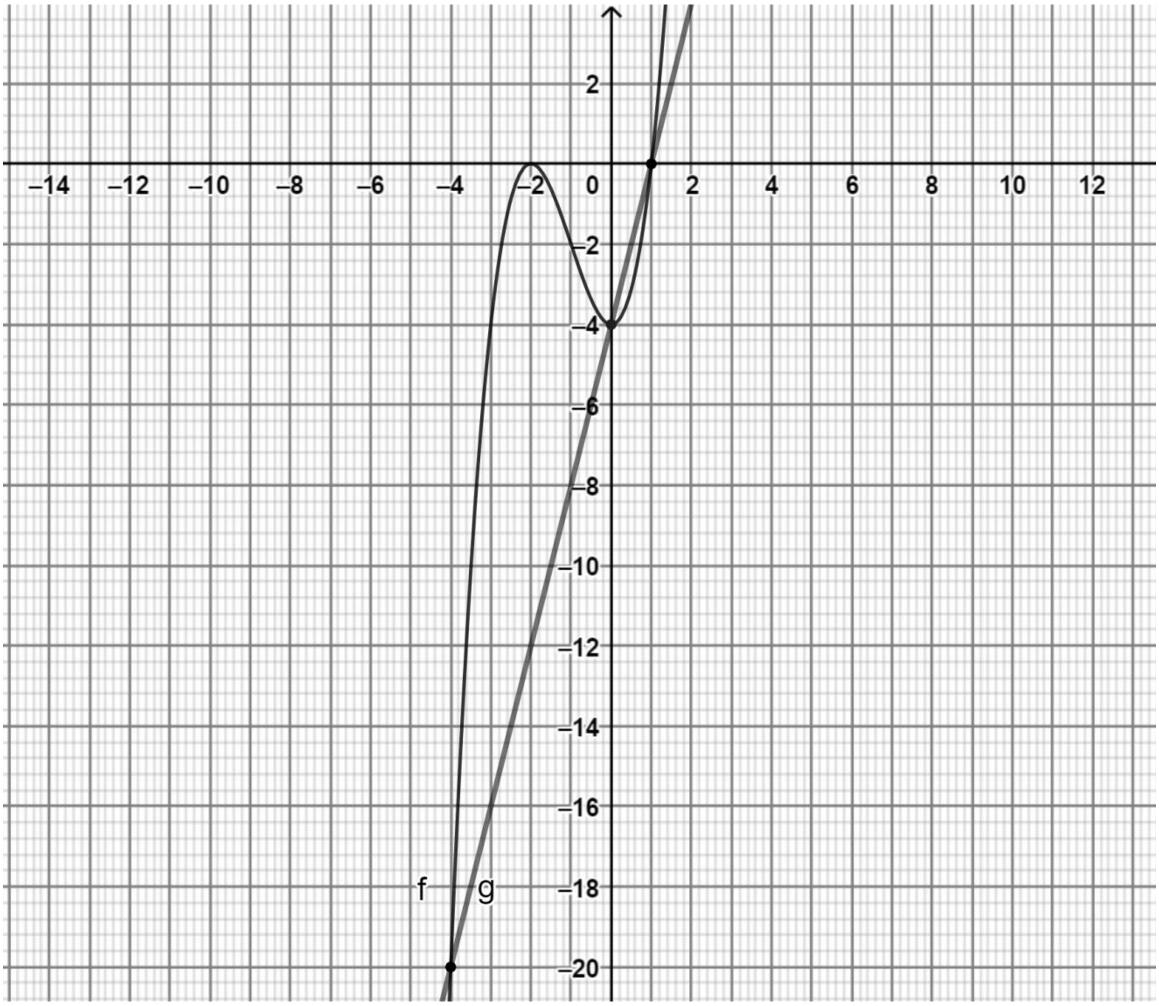
ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε x$\epsilon\mathbb{R}$. Τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f έχουν ως εξής:

Η f είναι γνησίως αύξουσα για x$\epsilon(-\infty,-2]$ και για x$\epsilon[0,+\infty)$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα για x$\epsilon[-2,0]$.



β) **Γραφική λύση:**

Οι ρίζες της εξίσωσης $\mathrm{f(x)=g(x)} \Leftrightarrow \mathrm{x^3+3x^2-4=4x-4}$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g .

Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία (-4,-20), (0,-4) και (1,0) δηλαδή στα σημεία με τετμημένες -4, 0 και 1.

Άρα, η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς -4, 0 και 1.

Αλγεβρική λύση:

Οι ρίζες της εξίσωσης $\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)}$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 4x - 4\ .$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x \in R$.

$$x^3 + 3x^2 - 4 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4)x = 0$$

$\Leftrightarrow x = 0$ ή $x^2 + 3x - 4 = 0$ ή ισοδύναμα $x = -4$ ή $x = 1$

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης $\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)}$ είναι οι αριθμοί -4, 0 και 1.

γ) Αλγεβρικά η ανίσωση λύνεται ως εξής:

$$\mathrm{g(x)} < \mathrm{f(x)} \Leftrightarrow 4x - 4 < x^3 + 3x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 3x - 4)x > 0.$$

Το πρόσημο του γινομένου φαίνεται στον παρακάτω πίνακα πρόσημων:

x	-∞		-4		0		1		+∞
x		-		-	0	+		+	
$x^2 + 3x - 4$		+	0	-		-	0	+	
$x(x^2 + 3x - 4)$		-	0	+	0	-	0	+	

Άρα, το γινόμενο γίνεται θετικό για $x \in (-4,0) \cup (1, +\infty)$.