ΛΥΣΗ

α) Από το σχήμα της εκφώνησης προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. Επίσης, η μέγιστη τιμή της είναι ίση με 1 και επιτυγχάνεται όταν $x=0$.

β) Από την ανισότητα $\alpha<\frac{1}{4}$ και τη μονοτονία της f συμπεραίνουμε ότι $f(\alpha)>f\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(\alpha)>\frac{1}{2}$, οπότε $2f(\alpha)-1>0$.

Επίσης, $\beta>\frac{1}{4}$, οπότε $f(\beta)<f\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow f(\beta)<\frac{1}{2}$, απ' όπου προκύπτει ότι $2f(\beta)-1<0$.

Άρα, $P=\left(2f(\alpha)-1\right)\left(2f(\beta)-1\right)<0$.

γ) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία, δίνονται από τη λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Με $x\geq 0$ έχουμε:

$$f(x)=2x\Leftrightarrow 1-\sqrt{x}=2x\Leftrightarrow 2x+\sqrt{x}-1=0$$

Αν θέσουμε $\sqrt{x}=u$, τότε η εξίσωση γράφεται $2u^2+u-1=0$ και έχει λύσεις τους αριθμούς -1 και $\frac{1}{2}$. Έτσι έχουμε:

- $u=-1$: $\sqrt{x}=-1$ που είναι αδύνατη.
- $u=\frac{1}{2}$: $\sqrt{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$

Άρα το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

Εναλλακτική λύση του ερωτήματος γ)

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{4}$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x)=2x$. Επιπλέον:

- Αν $x>\frac{1}{4}$, τότε $2x>\frac{1}{2}$ και $f(x)<\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.
- Αν $0\leq x<\frac{1}{4}$, τότε $2x<\frac{1}{2}$ και $f(x)>\frac{1}{2}$, οπότε $f(x)\neq 2x$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μοναδική λύση την $x=\frac{1}{4}$ και το μοναδικό κοινό σημείο της C_f με την ευθεία είναι το $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.