ΛΥΣΗ

α) Η ποσότητα x^4+1 είναι αυστηρά θετική, μάλιστα $x^4+1 \geq 0+1=1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Οπότε, το x^4+1 δεν μηδενίζεται για καμιά τιμή του x και συνεπώς, το πολυώνυμο $P(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Εναλλακτικά: Αν υπήρχε πραγματικός αριθμός ρ τέτοιος ώστε $\rho^4+1=0$, τότε θα έπρεπε $\rho^4=-1$, πράγμα άτοπο.

β) Θα εκτελέσουμε τις πράξεις στο δεύτερο μέλος και στη συνέχεια θα εξισώσουμε τους συντελεστές των δυνάμεων του x.

$x^4+1=(x^2+\alpha x+1)\cdot(x^2+\beta x+1) \Leftrightarrow$

$x^4+1=x^4+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta+2)x^2+(\alpha+\beta)x+1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \alpha\cdot\beta=-2\\ \alpha+\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha\cdot\beta=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-\beta\\ \alpha=\pm\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}\alpha=\sqrt{2} \text{ και } \beta=-\sqrt{2}\\ \alpha=-\sqrt{2} \text{ ή } \beta=\sqrt{2}\end{matrix}$$

Άρα: $\alpha=\sqrt{2}$ και $\beta=-\sqrt{2}$ ή $\alpha=-\sqrt{2}$ και $\beta=\sqrt{2}$

Συνεπώς, $x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$.

γ) Η πρόταση είναι λάθος, σύμφωνα με το α) και β) ερώτημα. Το αντιπαράδειγμα είναι το πολυώνυμο $P(x)=x^4+1$ το οποίο αναλύεται σε γινόμενο δύο πολυωνύμων 2ου βαθμού:

$$x^4+1=\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\cdot\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right).$$

αλλά δεν έχει πραγματικές ρίζες.