ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 = x^2(x+2) + (x+2) = (x+2)(x^2+1)$.

Αλλά $x^2 + 1 > 0$ για κάθε τιμή του x. Έτσι η εξίσωση $P(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x^2+1) = 0$, δίνει $x + 2 = 0$, άρα $x = -2$.

β) Θέλουμε το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 + bx + c$ να έχει ως ρίζα τον αριθμό 1.

Άρα πρέπει $P(1) = 0$, δηλαδή $1^3 - 1^2 + b + c = 0$, άρα $b + c = 0$.

Παρατηρούμε λοιπόν πως όποιον αριθμό και να επιλέξει ο μαθητής Β για τον συντελεστή b ή c, ο Α μπορεί μετά να επιλέξει τον αντίθετό του.

γ) Για να έχει το πολυώνυμο $P(x)$ ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$ αρκεί να ισχύει

$P(0) \cdot P(1) < 0$, σύμφωνα με το Θεώρημα σελ. 145 του σχολικού βιβλίου.

Αλλά $P(0) = 1$ και $P(1) = (-1)^3 + a(-1)^2 - b + 1 = a - b$.

Αν λοιπόν ο μαθητής Β επιλέξει έναν αριθμό στη θέση του α, τότε αρκεί ο μαθητής Α να επιλέξει έναν μεγαλύτερο αυτού στη θέση του b.

Αν ο μαθητής Β επιλέξει έναν αριθμό στη θέση του b, τότε αρκεί ο μαθητής Α να επιλέξει έναν μικρότερο αυτού στη θέση του α.

δ) Αν ένα πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές έχει ακέραια ρίζα, τότε αυτή θα είναι διαιρέτης του σταθερού όρου. Αλλά στο $P(x)$ ο σταθερός όρος είναι το 2022 το οποίο όμως δεν είναι πολλαπλάσιο του 13, αφού $\frac{2022}{13} = 155 + \frac{7}{13}$. Έτσι, αποκλείεται το 13 να είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.