ΛΥΣΗ

α)

i. Είναι $\mathrm{AB}=\alpha-(-\alpha)=2\alpha$.

Επειδή το Δ ανήκει στην παραβολή $y=3-x^2$ ισχύει $y_\Delta=3-{x_\Delta}^2=3-\alpha^2$. Οπότε $\mathrm{A\Delta}=y_\Delta-y_\mathrm{A}=3-\alpha^2-0=3-\alpha^2$.

Είναι $\mathrm{E}=\mathrm{AB}\cdot\mathrm{A\Delta}=2\alpha\left(3-\alpha^2\right)=6\alpha-2\alpha^3$.

Επομένως για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $\mathrm{E}=f(\alpha)=-2\alpha^3+6\alpha$.

ii. Το ζητούμενο εμβαδό ισούται με $f(1)=-2\cdot1^3+6\cdot1=4$ τετ. μονάδες.

β) Για να αποδείξουμε ότι το εμβαδό E δεν μπορεί να ξεπεράσει τις 4 τετραγωνικές μονάδες αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{E}\leq4$.

Έχουμε

$$\mathrm{E}\leq4\Leftrightarrow-2\alpha^3+6\alpha\leq4$$

$$\Leftrightarrow2\alpha^3-6\alpha+4\geq0$$

$$\Leftrightarrow\alpha^3-3\alpha+2\geq0$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}(\alpha+2)(\alpha-1)^2\geq0$$

που ισχύει για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$

1	0	-3	2	ρ = - 2
	-2	4	-2	
1	-2	1	0	

Οπότε,

$$\alpha^3-3\alpha+2=(\alpha+2)\left(\alpha^2-2\alpha+1\right)$$
$$=(\alpha+2)(\alpha-1)^2 \qquad :(1)$$

γ) Για κάθε $\alpha\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ είναι $\mathrm{E}\leq4\overset{(\alpha)}{\Leftrightarrow}f(\alpha)\leq f(1)$ άρα το εμβαδό έχει μέγιστη τιμή 4 τετραγωνικές μονάδες στη θέση $\alpha=1$.