ΛΥΣΗ

α)

i. Το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα δεδομένα έχει κάθετες πλευρές x, y και εμβαδόν $\mathrm{E}=60cm^2$, οπότε: $\frac{xy}{2}=60 \Leftrightarrow y=\frac{120}{x}$.

ii. Το ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές x, $y=\frac{120}{x}$ και υποτείνουσα $(x+2)$.

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&(x+2)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow \\
&(x+2)^2=x^2+\left(\frac{120}{x}\right)^2 \Leftrightarrow \\
&x^2+4x+4=x^2+\frac{14400}{x^2} \Leftrightarrow \\
&x+1=\frac{3600}{x^2} \Leftrightarrow \\
&x^3+x^2-3600=0. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

β) Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της εξίσωσης $x^3+x^2-3600=0$ που είναι μικρότερες του 16 και είναι θετικοί αριθμοί (το x είναι μήκος πλευράς τριγώνου), είναι οι $1,2,3,4,5,6,8,9,10,12$ και 15. Οι αριθμοί που είναι μικρότεροι του 10 δεν μπορεί να είναι ρίζες, γιατί το άθροισμα $\left(x^3+x^2\right)$ πρέπει να ισούται με 3600. Παρατηρούμε ότι $10^3+10^2-3600\neq 0$, άρα το 10 δεν είναι ρίζα της εξίσωσης, όπως δεν είναι και το 12. Καταλήγουμε στο 15 και κάνουμε τη διαίρεση $\left(x^3+x^2-3600\right)\div(x-15)$:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x^3+x^2+0x-3600 & x-15 \\ \cline{3-3}
(+) & -x^3+15x^2 & x^2+16x+240 \\ \cline{2-2}
 & 16x^2+0x-3600 & \\
(+) & -16x^2+240x & \\ \cline{2-2}
 & 240x-3600 & \\
(+) & -240x+3600 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}
$$

Οπότε η εξίσωση (1) γράφεται: $(x-15)\left(x^2+16x+240\right)=0$.

Η μόνη λύση της εξίσωσης είναι $x=15$, γιατί η $x^2+16x+240=0$ είναι αδύνατη ($\Delta=-704<0$).

Άρα οι κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι $15cm$ και $\frac{120}{15}=8cm$. Η υποτείνουσα είναι $15+2=17cm$.

γ) Ένα είναι το ορθογώνιο τρίγωνο που ικανοποιεί τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος και αυτό είναι το τρίγωνο που βρήκαμε στο β) ερώτημα, γιατί η εξίσωση $x^3+x^2-3600=0$ δεν έχει άλλη λύση εκτός από την $x=15$.