ΛΥΣΗ

α) Όπως φαίνεται στο σχήμα, η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα στο $(-2,0)$, οπότε έχουμε ισοδύναμα:

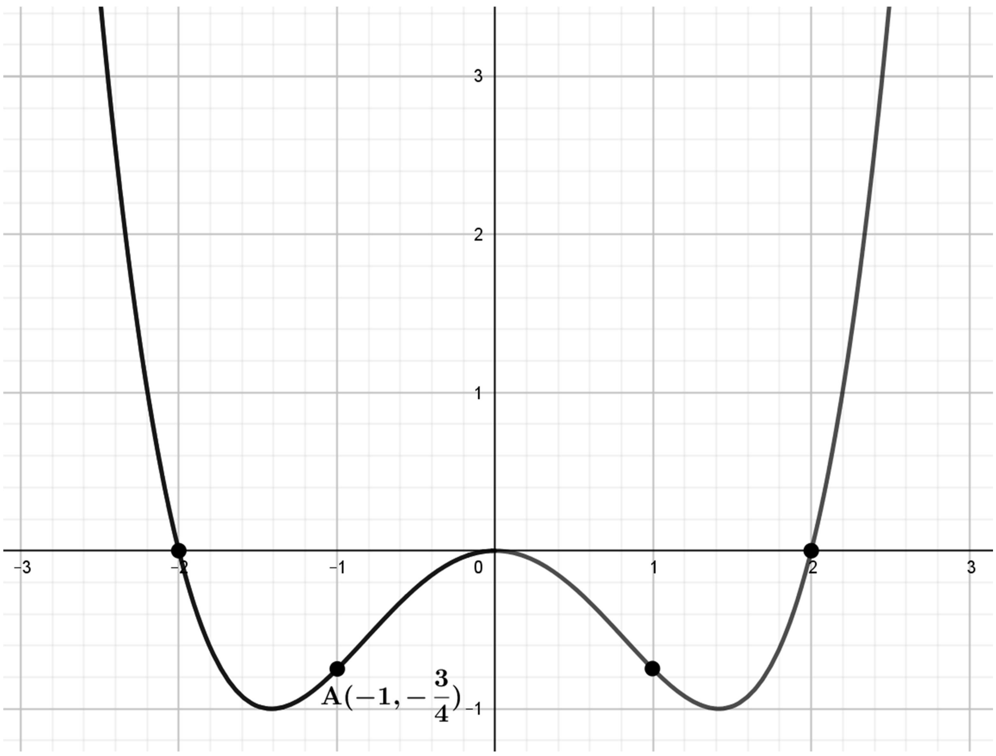
$$\begin{aligned}&f(-2)=0 \Leftrightarrow\\&\frac{1}{4}(-2)^4+\alpha\cdot(-2)^2=0 \Leftrightarrow\\&4+4\alpha=0 \Leftrightarrow\\&\alpha=-1.\end{aligned}$$

β)

i. Έχουμε $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει και $-x\in\mathbb{R}$. Οπότε:

$$f(-x)=\frac{1}{4}(-x)^4-(-x)^2=\frac{1}{4}x^4-x^2=f(x).$$

ii. Στο βi) αποδείξαμε ότι $f(-x)=f(x)$, δηλαδή ότι η f είναι άρτια. Συνεπώς η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον $y'y$ άξονα:



γ) Πραγματικά $f(-\sqrt{3})=\frac{1}{4}(-\sqrt{3})^4-(-\sqrt{3})^2=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4}$, οπότε το σημείο $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Εξαιτίας της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f ως προς τον $y'y$ άξονα, τα σημεία $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ θα ανήκουν επίσης στη γραφική παράσταση και η ευθεία $y=-\frac{3}{4}$ έχει τέσσερα κοινά σημεία με αυτήν, τα $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$.

Εναλλακτικά, θα λύσουμε την εξίσωση $f(x)=-\frac{3}{4}$. Έχουμε ισοδύναμα:

$$
\begin{aligned}
&f(x)=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
&\frac{1}{4}x^4-x^2=-\frac{3}{4} \Leftrightarrow \\
&x^4-4x^2+3=0 \Leftrightarrow \\
&x^2=1 \quad \text{ή} \quad x^2=3
\end{aligned}
$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι τέσσερις: $x=-1,\ x=1,\ x=-\sqrt{3},\ x=\sqrt{3}$ και συνεπώς τα κοινά σημεία της ευθείας $y=-\frac{3}{4}$ με την γραφική παράσταση της f είναι τα $\left(-1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(1,-\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$ και $\left(\sqrt{3},-\frac{3}{4}\right)$.