ΛΥΣΗ

Η διαίρεση $P(x):Q(x)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+\alpha x+\beta & x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-x^4+2x^3-x^2 & x^2-2 \\ \cline{1-1}
-2x^2+\alpha x+\beta & \\
2x^2\quad -4x+2 & \\ \cline{1-1}
(\alpha-4)x+\beta+2 &
\end{array}
$$

Αφού το $P(x)$ διαιρείται με το πολυώνυμο $Q(x)=x^2-2x+1$, θα πρέπει το υπόλοιπο της παραπάνω διαίρεση να είναι το μηδενικό πολυώνυμο, που συμβαίνει μόνο όταν $\alpha-4=0$ και $\beta+2=0$, δηλαδή $\alpha=4$ και $\beta=-2$.

β) Για $\alpha=4,\beta=-2$ έχουμε $P(x)=x^4-2x^3-x^2+4x-2$.

i. Η διαίρεση $P(x):(x^2+5)$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

$$
\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-x^2+4x-2 & x^2+5 \\ \cline{2-2}
-x^4-5x^2 & x^2-2x-6 \\ \cline{1-1}
-2x^3-6x^2+4x-2 & \\
2x^3+10x & \\ \cline{1-1}
-6x^2+14x-2 & \\
6x^2+30 & \\ \cline{1-1}
14x+28 &
\end{array}
$$

και η ταυτότητα της διαίρεσης είναι η εξής: $P(x)=\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28$

ii. Η εξίσωση $P(x)=14(x+2)$ με τη βοήθεια της παραπάνω ταυτότητας γίνεται

$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28=14(x+2)\Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)+14x+28=14x+28\Leftrightarrow$$
$$\left(x^2+5\right)(x^2-2x-6)=0$$

και επειδή $x^2+5\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, έχουμε ότι $x^2-2x-6=0$ δηλαδή $x=\frac{2\pm\sqrt{28}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{7}}{2}=1\pm\sqrt{7}$.