ΛΥΣΗ

α)

i. Αφού το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)$ ισχύει ότι:

$$P(1)=0 \Leftrightarrow$$
$$2\cdot 1^3+\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1-5=0 \Leftrightarrow$$
$$\alpha+\beta=3.$$

Επίσης το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-2)$ είναι το $P(2)$. Άρα,

$$P(2)=-1 \Leftrightarrow 2\cdot 2^3+\alpha\cdot 2^2+\beta\cdot 2-5=-1 \Leftrightarrow$$
$$16+4\alpha+2\beta-5=-1 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha+2\beta=-12 \Leftrightarrow 2\alpha+\beta=-6.$$

ii. Για να βρούμε τις τιμές των α, β λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \alpha+\beta=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha+\beta=-6\\ \beta=3-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}2\alpha+(3-\alpha)=-6\\ \beta=3-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\alpha+3=-6\\ \beta=3-\alpha\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=-9\\ \beta=12\end{cases}.$$

β) Κάνουμε τη διαίρεση $P(x):(x-1)$ με το σχήμα Horner και έχουμε:

2	-9	12	-5	1
	2	-7	5	
2	-7	5	0	

Άρα, $P(x)=(x-1)(2x^2-7x+5)$. Το τριώνυμο $2x^2-7x+5$ έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-7)^2-4\cdot 2\cdot 5=9$ και ρίζες:

$$x_1=\frac{7+\sqrt{9}}{4}=\frac{5}{2} \text{ και } x_2=\frac{7-\sqrt{9}}{4}=1.$$

Άρα, $P(x)=(x-1)2(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)=2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)$.

Η γραφική παράσταση της $P(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$ για τις τιμές του x για τις οποίες

$$P(x)<0 \Leftrightarrow 2(x-1)^2\left(x-\frac{5}{2}\right)<0.$$

Ο πίνακας προσήμων του $P(x)$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$(x-\frac{5}{2})$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Άρα, $P(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (1, \frac{5}{2})$.

γ) Από το ερώτημα β) προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της P τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $(1,0)$ και $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$. Από τη γραφική παράσταση προκύπτει ότι η συνάρτηση P είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.