ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$:

$$
\begin{array}{rr|l}
x^4+x^3 & +\alpha\,x-4 & x^2-3x+2 \\ \cline{3-3}
-x^4+3x^3-2x^2 & & x^2+4x+10 \\ \cline{1-2}
4x^3-2x^2 & +\alpha\,x-4 & \\
-4x^3+12x^2 & -\,8\,x & \\ \cline{1-2}
10x^2 & +\,(\alpha-8)\,x-4 & \\
-10x^2 & +30\,x-20 & \\ \cline{1-2}
 & (\alpha+22)\,x-24 &
\end{array}
$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x)=\delta(x)\cdot(x^2+4x+10)+(\alpha+22)\,x-24$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $(\alpha+22)\,x-24=24x-24$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι:

$(\alpha+22)\,x-24=24x-24 \Leftrightarrow \alpha+22=24 \Leftrightarrow \alpha=2.$

β) Για $\alpha=2$, είναι $P(x)=x^4+x^3+2\,x-4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x-1$ είναι το $P(1)=0$.

ii. Ζητείται η επίλυση της εξίσωσης $P(x)=0$.

Είναι: $P(1)=0 \Leftrightarrow 1$ ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow x-1$ παράγοντας του $P(x)$.

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	1	0	2	-4	ρ =1
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

Επομένως ισχύει: $P(x)=(x-1)\cdot(x^3+2x^2+2x+4)$

Αλλά $x^3+2x^2+2x+4=x^2(x+2)+2(x+2)=(x+2)(x^2+2)$.

Τελικά ισχύει $P(x)=(x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)$.

Είναι λοιπόν

$$P(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)\cdot(x+2)\cdot(x^2+2)=0 \xLeftrightarrow{x^2+2\neq 0} x=1 \text{ ή } x=-2.$$

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$, είναι τα $A(-2,0)$ και $B(1,0)$.

iii. Ζητείται η επίλυση της ανίσωσης $P(x) < 0$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	**−2**		**1**	$+\infty$
$x-1$	−		−	0	+
$x+2$	−	0	+		+
x^2+2	+		+		+
$P(x)$	+	0	−	0	+

Ως εκ τούτου, $P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.