ΛΥΣΗ

α) i. Επειδή $P(0)=2\neq 0$, το πολυώνυμο δεν έχει λύση τον αριθμό 0.

ii. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου, τότε ισχύει $P(\rho)=0$ δηλαδή

$$2\rho^4-5\rho^3+4\rho^2-5\rho+2=0,\ (1).$$

Για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα του, αρκεί να δείξουμε ότι $P\left(\frac{1}{\rho}\right)=0$.

Πραγματικά, είναι:

$$P\left(\frac{1}{\rho}\right)=\frac{2}{\rho^4}-\frac{5}{\rho^3}+\frac{4}{\rho^2}-\frac{5}{\rho}+2=\frac{1}{\rho^4}\left(2-5\rho+4\rho^2-5\rho^3+2\rho^4\right)=0$$

λόγω της (1).

β) Επειδή οι μοναδικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί που μπορεί να είναι ρίζες του είναι οι θετικοί διαιρέτες του 2, με $x=2$ έχουμε:

$$P(2)=2\cdot 16-5\cdot 8+4\cdot 4-5\cdot 2+2=50-50=0$$

οπότε ο αριθμός 2 είναι θετική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου.

γ) Η εξίσωση $P(x)=0$ έχει ρίζα τον αριθμό 2 και λόγω του ερωτήματος α) έχει ρίζα και τον αριθμό $\frac{1}{2}$.

Έτσι, με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

2	-5	4	-5	2	2
	4	-2	4	-2	
2	-1	2	-1	0	

$$P(x)=(x-2)(2x^3-x^2+2x-1)$$

και αν επαναλάβουμε τη διαδικασία για το πολυώνυμο $2x^3-x^2+2x-1$ με το $\frac{1}{2}$

2	-1	2	-1	$\frac{1}{2}$
	1	0	1	
2	0	2	0	

συμπεραίνουμε ότι

$$P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2)=(x-2)(2x-1)(x^2+1)$$

οπότε

$$P(x)=0\Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\frac{1}{2}.$$

δ) Επειδή για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $x^2+1>0$, το πρόσημο του πολυωνύμου είναι ίδιο με το πρόσημο του τριωνύμου $(x-2)(2x-1)$. Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμων.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$(x-2)(2x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Από τον πίνακα προκύπτει ότι λύση της ανίσωσης $P(x)<0$ είναι κάθε αριθμός του διαστήματος $\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$.