ΛΥΣΗ

α) Είναι: $\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = -\sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Άρα: $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha.$

β) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f$ είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε: $f(-x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(-x) - 3\sigma\upsilon\nu(-x) + \alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha = f(x)$.

Άρα η συνάρτηση $f$ είναι άρτια.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f$ διέρχεται από το σημείο $M(\frac{\pi}{3}, 1)$ αν και μόνον αν $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{3} - 3\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} + \alpha = 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} - 3 \cdot \frac{1}{2} + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

δ) Με $\alpha = 2$ έχουμε $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2$.

Για να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των δύο γραφικών παραστάσεων λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 2 = 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) + 9\sigma\upsilon\nu x - 9 \Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu^2 x - 12\sigma\upsilon\nu x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$(2\sigma\upsilon\nu x - 3)^2 = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{3}{2}$, αδύνατη.

Αφού η παραπάνω εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχουν σημεία τομής των δύο γραφικών παραστάσεων.