

ΘΕΜΑ 1

A. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

B. Έστω $\log_{\alpha} \theta_1 = x_1$ και $\log_{\alpha} \theta_2 = x_2$

Τότε έχουμε $\alpha^{x_1} = \theta_1$ και $\alpha^{x_2} = \theta_2$

Οπότε $\alpha^{x_1} \cdot \alpha^{x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2 \Rightarrow \alpha^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$

Από τον ορισμό του λογάριθμου, αυτή η ισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2 \Rightarrow \log_{\alpha} (\theta_1 \theta_2) = \log_{\alpha} \theta_1 + \log_{\alpha} \theta_2$$

ΘΕΜΑ 2

α) $\log_6 1 = 0$

β) $\log_5 \frac{1}{25} = \log_5 \frac{1}{5^2} = \log_5 5^{-2} = -2$

γ) $\log_{49} 7 = \log_{49} \sqrt{49} = \log_{49} 49^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

δ) $\log_4 8 = \log_4 (2 \cdot 4) = \log_4 2 + \log_4 4 = \log_4 \sqrt{4} + \log_4 4 =$
 $= \log_4 4^{\frac{1}{2}} + \log_4 4 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

ε) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} 3^2 = \log_{\sqrt{3}} \left((\sqrt{3})^2 \right)^2 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4$

ΘΕΜΑ 3

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

$$f(x) = 10^{x \log 4 + \log 2} - 5 \cdot e^{x \ln 2} = 10^{x \log 4} \cdot 10^{\log 2} - 5 \cdot e^{\ln 2x} =$$

$$= 10^{\log 4^x} \cdot 2 - 5 \cdot 2^x = 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x$$

β) $f(x) = -2 \Rightarrow 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x = -2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

Θέτουμε $y = 2^x$ και η εξίσωση γράφεται: $2y^2 - 5y + 2 = 0$

$$\Delta = 9 \quad y_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{matrix}$$

Για $y = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$

Για $y = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \Rightarrow x = -1$

ΘΕΜΑ 4

α) i) Από εκφώνηση έχουμε: $x^{\log 5} = y^{\log 3} \Rightarrow \log(x^{\log 5}) = \log(y^{\log 3}) =$
 $\Rightarrow \log 5 \log x = \log 3 \log y \Rightarrow \beta \log x = \alpha \log y$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad & \text{Από εκφώνηση έχουμε : } (3x)^{\log 3} = (5y)^{\log 5} \Rightarrow \log((3x)^{\log 3}) = \log((5y)^{\log 5}) = \\
 & \Rightarrow \log 3 \log(3x) = \log 5 \log(5y) \Rightarrow \log 3(\log 3 + \log x) = \log 5(\log 5 + \log y) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \alpha(\alpha + \log x) = \beta(\beta + \log y)
 \end{aligned}$$

β) Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (i), (ii) με αγνώστους τους x, y

Οι α, β είναι γνωστοί αριθμοί

$$\begin{cases} \alpha \log y = \beta \log x \\ \alpha(\alpha + \log x) = \beta(\beta + \log y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = \frac{\alpha}{\beta} \log y \\ \alpha^2 + \frac{\alpha \cdot \alpha}{\beta} \log y = \beta^2 + \beta \log y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x = \frac{\alpha}{\beta} \log y \\ \log y \left(\frac{\alpha^2}{\beta} - \beta \right) = \beta^2 - \alpha^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = \frac{\alpha}{\beta} \log y \\ \log y \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta} \right) = \beta^2 - \alpha^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x = \frac{\alpha}{\beta} \log y \\ \log y = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = -\alpha \\ \log y = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log x = -\log 3 \\ \log y = -\log 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x = \log \frac{1}{3} \\ \log y = \log \frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$$