

ΘΕΜΑ 1

A. α) Λ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Σ

B. $\alpha' \text{ μέλος} = \log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \log_{\alpha} (\underbrace{\theta \cdot \theta \cdots \theta}_{\kappa \text{ φορές}}) =$
 $= \underbrace{\log_{\alpha} \theta + \log_{\alpha} \theta + \cdots + \log_{\alpha} \theta}_{\kappa \text{ φορές}} = \kappa \log_{\alpha} \theta = \beta' \text{ μέλος}$

ΘΕΜΑ 2

$$\alpha' \text{ μέλος} = \frac{2 \log 3 + 3 \log 2 + \log 5 - 1}{2 \log 2 + \log 150 - 2} = \frac{\log 3^2 + \log 2^3 + \log 5 - \log 10}{\log 2^2 + \log 150 - \log 100} =$$

$$= \frac{\log \left(\frac{3^2 \cdot 2^3 \cdot 5}{10} \right)}{\log \left(\frac{2^2 \cdot 150}{100} \right)} = \frac{\log(36)}{\log(6)} = \frac{\log 6^2}{\log 6} = \frac{2 \log 6}{\log 6} = 2 = \beta' \text{ μέλος}$$

ΘΕΜΑ 3

Θέτουμε $x + y = \alpha$, $x - y = \beta$ και το σύστημα γράφεται :

$$\begin{cases} 2^{\alpha} - 3 \cdot 2^{\beta} = 2 \\ 3 \cdot 2^{\alpha} - 10 \cdot 2^{\beta} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\alpha} = 2 + 3 \cdot 2^{\beta} \\ 3 \cdot (2 + 3 \cdot 2^{\beta}) - 10 \cdot 2^{\beta} = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{\alpha} = 2 + 3 \cdot 2^{\beta} \\ 6 + 9 \cdot 2^{\beta} - 10 \cdot 2^{\beta} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\alpha} = 2 + 3 \cdot 2^{\beta} \\ 2^{\beta} = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^{\alpha} = 2 + 3 \cdot 2 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{\alpha} = 8 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

Άρα για να βρούμε τα x, y μένει να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 4

α) Για να ορίζεται η f , θα πρέπει $x > 0$

β) $f(x^{\ln x}) + f\left(\frac{1}{x}\right) \geq f(e) \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 + \ln x^{\ln x} + 1 + \ln \frac{1}{x} \geq 1 + \ln e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + (\ln x)(\ln x) + 1 + \ln 1 - \ln x \geq 1 + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln^2 x - \ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x (\ln x - 1) \geq 0$$

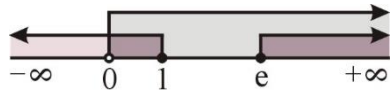
Θέτουμε $y = \ln x$ και η ανίσωση γράφεται : $y(y-1) \geq 0$

$$\begin{array}{c} 0 \qquad 1 \\ + \mid - \mid + \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 y &\leq 0 \\
 \Rightarrow \ln x &\leq 0 \\
 \Rightarrow \ln x &\leq \ln 1 \\
 \Rightarrow x &\leq 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &\geq 1 \\
 \Rightarrow \ln x &\geq 1 \\
 \Rightarrow \ln x &\geq \ln e \\
 \Rightarrow x &\geq e
 \end{aligned}$$

Συναληθεύουμε και με τον περιορισμό $x > 0$



και άρα η ανίσωση αληθεύει στο $(0, 1] \cup [e, +\infty)$

$$\begin{aligned}
 \gamma) \quad \ln(21^{f(x)} - 42) + \ln 4 &= [f(x) - 1] \ln 21 + \ln 76 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ln(21^{1+\ln x} - 42) + \ln 4 &= \ln x \cdot \ln 21 + \ln 76 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ln(21 \cdot 21^{\ln x} - 42) + \ln 4 &= \ln 21^{\ln x} + \ln 76 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ln(21 \cdot 21^{\ln x} - 42) - \ln 21^{\ln x} &= \ln 76 - \ln 4 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \ln\left(\frac{21 \cdot 21^{\ln x} - 42}{21^{\ln x}}\right) &= \ln\left(\frac{76}{4}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{21 \cdot 21^{\ln x} - 42}{21^{\ln x}} &= 19 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 21 \cdot 21^{\ln x} - 42 &= 19 \cdot 21^{\ln x} \Rightarrow \\
 2 \cdot 21^{\ln x} &= 42 \Rightarrow 21^{\ln x} = 21 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e
 \end{aligned}$$